

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA

ANNVS XIII
VOLVMEN XIII



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCCXXXXIX

INDEX



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII – N. 1
pag. 1-8

L'ESAME RADIOGRAFICO DEL CRANIO DI S. CATERINA DA SIENA (*)

(Con due tavole)

GIUSEPPE TONIOLO

SVMMARIVM. — Disserit Auctor de aspectu radiologico calvariae Sanctae Catharinae Senensis et fere omnia illius ossa in sacrarum reliquiarum theca adesse demonstrat. Profert insuper in lucem calvariam ipsam multifidam esse et simul coniunctam a gypso intus et foras illito ita ut lineamenta basis et aliae peculiaritates explorari omnino non possint.

La ricognizione delle reliquie dei Santi, praticata sistematicamente e periodicamente dalla Chiesa, non aveva mai usufruito fino al 1943 del metodo radiografico che, oltre a tutti i vantaggi noti e facilmente intuibili, dà soprattutto una documentazione iconografica che resta permanentemente a disposizione degli studiosi con una ricchezza di dati e di particolari, che permettono sempre e a chiunque di poter portare un contributo positivo all'Agiografia sulla base di rigorosi ed obbiettivi rilievi scientifici.

Fu in occasione della rimozione, per ragioni belliche, dell'Arca monumentale che conserva il corpo di S. Domenico in Bologna, che Padre Mario Camis, Maestro di Fisiologia e Sacerdote, pensò di adoperare il metodo radiologico ed all'uopo fece invitare per tali ricerche il Prof. GIAN GIUSEPPE PALMIERI. I risultati di tale indagine, comunicati in varie memorie (1), destarono l'interesse del mondo scien-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Renato Toniolo nella Riunione del 7 giugno 1949.

(1) PALMIERI G. G., «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna classe Scienze Fisiche», 1942-1943; «Pontificia Accademia Scientiarum Commentationes», anno VII, vol. VII, n. 24; «*Le Reliquie di S. Domenico*» *a cura dall'Ordine Domenicano*, 1946.

tifico ed incontrarono la sovrana approvazione del S. Padre Pio XII felicemente regnante.

Ciò spiega perchè nella ricognizione del Cranio di S. Caterina da Siena per il VI Centenario della Sua nascita, ai normali rilievi esterni ripetutamente compiuti, si credette opportuno, da parte dell'Autorità Ecclesiastica e Comunale, di aggiungere anche l'indagine radiologica. Essa fu eseguita l'11 aprile 1947 in una Sacrestia della Chiesa di S. Domenico di fronte alla intera Commissione nominata all'uopo. Devo premettere che dal punto di vista tecnico si è dovuto lavorare in condizioni assai precarie sia perchè il luogo dell'esame ci ha costretti a servirsi di un apparecchio trasportabile (Metallix), sia soprattutto perchè in quel periodo (a causa degli eventi bellici) il voltaggio della rete stradale era molto più basso del dovuto ed estremamente variabile per mancanza di stabilizzatori nelle cabine di trasformazione. Queste condizioni non ideali di lavoro ci costrinsero a rinunciare, sia alla teleradiografia, sia alla stereoradiografia per quanto quest'ultima, per la ragione che esporrò in seguito, non avrebbe potuto dare nessun maggiore ragguaglio.

I radiogrammi furono eseguiti alla distanza fuoco-film di 80 cm. e furono praticate 4 proiezioni classiche: latero-laterale destra (vedi fig. 1); latero-laterale sinistra (vedi fig. 2); occipitofrontale (vedi fig. 3) e frontooccipitale (vedi fig. 4). Non fu potuta eseguire la proiezione vertico-submento per il fatto che il Cranio della Santa poggia su un supporto in legno assai alto che avrebbe allontanato troppo l'oggetto dal film e perchè entro tale supporto le parti metalliche sono numerose e assai spesse.

Bisogna infatti notare che la reliquia della Santa è sostenuta da uno speciale basamento in legno al quale è fissata, oltre che da due nastri esterni che circondano la scatola cranica, anche per mezzo di una grossa asta metallica che passando attraverso il forame occipitale si porta in alto fino all'altezza del contorno superiore della sutura lambdoidea. Tale specie di gigantesco dente dell'epistrofeo sembra servire esclusivamente ad impedire lo scivolamento del Cranio dal supporto, non essendo visibili mezzi di fissazione radioopachi che lo colleghino a parti scheletriche. Anche la proiezione verticosubmento non avrebbe potuto dare risultati in tal senso, perchè nel basamento di legno sono

infisse grosse parti radioopache da cui si partono sia l'asta anzidetta, sia altre due aste minori ad uncino sulle quali sono fissati i nastri che immobilizzano il cranio esternamente. È invece da segnalare il tipo dell'armatura metallica del supporto e particolarmente dei chiodi infissi nel legno (chiodi fatti a mano) perchè insieme ai dati storici possono confermare l'epoca nella quale il Cranio fu posto nel descritto sostegno.

L'ingrandimento dell'immagine che si ottiene con la tecnica che abbiamo dovuto adoperare non ha per noi un gran valore, sia perchè esso è facilmente calcolabile (ingrandimento medio 11 %), sia soprattutto perchè lo stato di conservazione della reliquia non ci ha permesso (come vedremo in seguito) di visualizzare le formazioni della base e in particolare quelle della sella turcica che potevano avere per noi particolare interesse.

Il problema invece fondamentale ed irrisolvibile senza raggi X era quello di sapere se tutte le ossa del Cranio erano veramente presenti. Infatti il Cranio della Santa, per lunghe vicende ben note agli storiografi, è ricoperto da una specie di materia plastica (che l'esame chimico ha dimostrato essere composta di gesso, terra di Siena e sostanza adesiva) di colore ocra che ricopre uniformemente tutto lo scheletro; piccoli saggi, fatti con molta prudenza avevano già stabilito la presenza di osso sottostante, ma solo l'indagine X poteva renderci certi del fatto e soprattutto darci la visione diretta delle parti scheletriche.

Basta infatti uno sguardo di insieme ai vari radiogrammi per dimostrare che si tratta di un Cranio di massima ben conservato e nel quale sono presenti tutte le ossa; l'indagine radiologica ci dimostra pure che tale Cranio è piccolo, con volta pianeggiante, e di struttura delicata quale si osserva nel tipo femminile. Nella reliquia in esame si esclude assolutamente la presenza di vertebre cervicali e di parte di esse.

Un fatto che colpisce immediatamente l'osservatore è che la base, la volta e lo scheletro facciale sono irregolarmente ricoperti di una sostanza intensamente radioopaca per la quale in molti tratti non si può apprezzare la minuta struttura del tessuto osseo. Tale opacità è netta e spiccatissima nella metà superiore ed anteriore della scatola

cranica in corrispondenza cioè della metà superiore della squama del frontale e della metà frontale dei parietali, per cui è certo che in tale sede la pasta radioopaca deve essere stata distribuita anche sul tavolato interno. Ciò evidentemente è reso possibile dal fatto che posteriormente a tale zona iperopaca, vi è una larga breccia dei parietali, a margini molto irregolari, che interessa la linea mediana dietro il vertice al di sopra della sutura lamboidea. Appare quindi facile che attraverso una tale breccia sia stato introdotto del materiale eterogeneo.

Nelle due regioni temporali si notano delle volute, imitanti grossolanamente il padiglione dell'orecchio, che si rendono visibili per la solita verniciatura: dovendosi escludere che si possa trattare del vero padiglione dell'orecchio (anche per le ricerche dirette) sembra che l'ipotesi più probabile sia quella di una ricostruzione in materiale plastico. Molto nette appaiono, nelle varie proiezioni, la sutura lambdoidea e quella squamosa, perchè il gesso penetrando negli interstizi le ha maggiormente evidenziate.

Altro fatto facilmente rilevabile è il numero eccezionale di fratture riscontrabili in tutto il Cranio: fratture evidentemente provocate *postmortem* e che per il loro numero è impossibile descrivere minutamente. Ad ogni modo le principali oltre a quella con perdita di sostanza dei parietali già segnalata, sono: una frattura trasversale del ramo ascendente della mandibola sinistra, una frattura comminuta della metà destra del frontale e una frattura a lambdà parieto temporale sinistra. Queste molteplici e complesse fratture ci spiegano la ragione per cui è stato impiegato il gesso da presa che ha lo scopo di tenere insieme soprattutto le ossa della volta; siccome però il suo candore disdiceva all'aspetto esteriore della reliquia, è probabile che si sia pensato di mescolarvi gli altri componenti che dànno al Cranio una tinta ocra che ricordando la pelle, fa assomigliare lo scheletro facciale ad un volto incartapecorito o mummificato.

Questa prima sommaria descrizione delle condizioni in cui si trova attualmente il Cranio della Santa Patrona d'Italia, ci esime evidentemente da un esame particolareggiato che appare impossibile. Si deve tuttavia notare che se tutte le singole ossa del Cranio e della faccia sono presenti, esse dimostrano una profonda decalcificazione sì che

l'osso, là dove è visibile, ha un aspetto tarlato e poroso che gli conferisce una particolare fragilità.

Nella volta i tavolati sono particolarmente sottili con diploe scarsa tantochè lo spessore totale dell'osso è molto piccolo e ciò potrebbe in parte spiegarci, insieme alle ben note vicende storiche, la molteplicità delle linee di frattura che si intersecano in tutta la volta.

Il profilo della base ha direzione normale, ma esso è reso inesplorabile nei suoi componenti, perchè la sostanza radioopaca di cui si è largamente riferito, la ricopre in gran parte per cui nulla di preciso si può dire sulla forma e grandezza della sella turcica, delle apofisi clinoidee, della lamina quadrilatera e dei seni sfenoidali.

Lo scheletro facciale è quello che appare meglio esplorabile e meglio conservato. Ha ossa nasali ben sviluppate; mandibola sottile e sporgente. I denti sono notevolmente decalcificati e per le condizioni sopradescritte del cranio non possono essere esattamente numerati: certo sono più gli elementi mancanti che quelli presenti.

Nelle proiezioni sagittali si nota che le fosse nasali sono assai ampie. Normali i seni mascellari. Non si apprezzano i seni frontali o perchè rudimentali, o perchè opacati dal gesso: tuttavia se presenti, essi devono essere assai piccoli. Anche la porzione pneumatica della mastoide appare scarsamente sviluppata. Entro l'orbita destra, nella sua parte mediale, si proietta l'ombra di una formazione intensamente radioopaca, a forma di pera, con contorni in parte dentellati della lunghezza di 15 mm. e con larghezza massima di 10 mm., formazione che in proiezione latero laterale sembra appoggiata nella fossa cranica media lateralmente alla sella turcica.

L'interpretazione di tale immagine appare assai difficile: in linea di ipotesi si potrebbe supporre, trattandosi evidentemente di parte metallica, che sia un perno o un beccuccio della siringa accidentalmente caduto nella fossa cranica media durante il restauro della Sacra testa, con il gesso da presa.

In conclusione i dati obbiettivi che l'indagine radiologica ha potuto rilevare ci permettono di portare:

1) un nuovo decisivo contributo alla certezza che al di sotto della pasta opaca che riveste la Sacra Reliquia vi è un cranio umano molto probabilmente di sesso femminile;

2) una maggiore conoscenza della persona fisica di S. Caterina da Siena notando che il cranio in esame per le sue caratteristiche morfologiche ricorda molto il ritratto che della Santa ci ha lasciato il suo contemporaneo Andrea Vanni;

3) dei nuovi dati (con il rilievo delle molteplici e gravi fratture) che devono essere valutati e discussi insieme alle vicende storiche che la preziosa Reliquia ha traversato per giungere fino a noi.



Fig. 1.



Fig. 2.

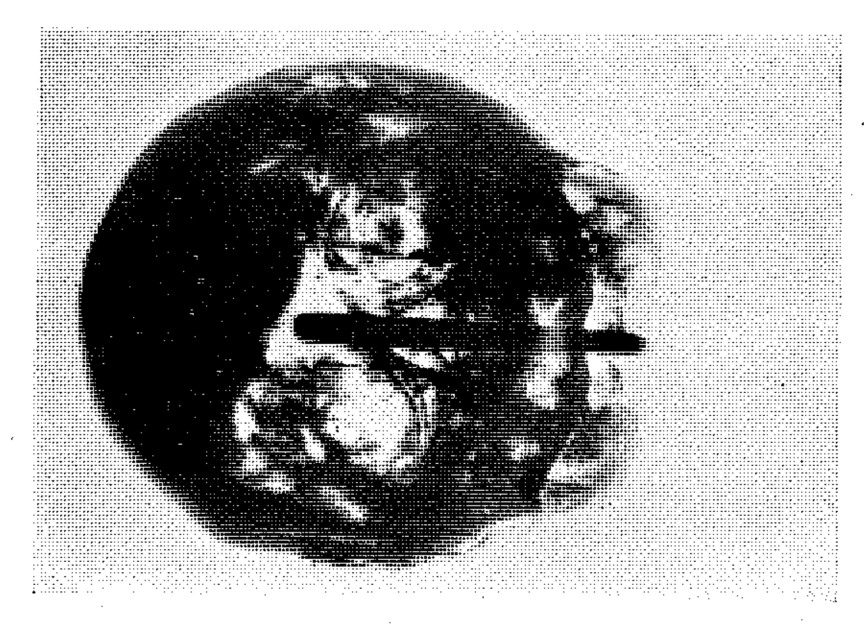


Fig. 4.

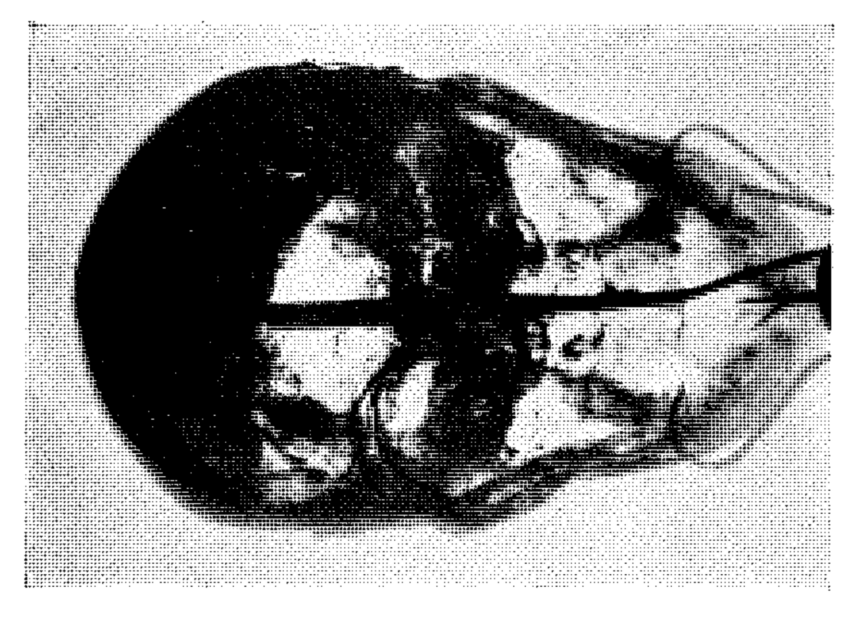


Fig. 3.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 2
pag. 9-28

SUI SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARI E SUI LORO AGGIUNTI DI LAGRANGE (*)

NOTA PRIMA

ARMANDO CHIELLINI

SVMMARIVM. — Hac in Nota systhema adiunctum cuiusdam systhematis linearis ordinarii definitur ab Auctore qui adhibet cognitam illam proprietatem Jacosianam circa adiunctum Lagrangianum cuiusdam aequationis differentialis linearis; insuper addit Auctor nonnullas proprietates fundamentales huius systematis.

§ 1. – ALCUNE CONSIDERAZIONI FONDAMENTALI SULLE EQUAZIONI AGGIUNTE.

1\. – Presa un'equazione differenziale lineare dell'ordine n

[1] $$E(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 ,$$

è ben nota l'importanza che in molte questioni di Analisi e di Geometria presenta la sua *aggiunta di Lagrange*

[1₁] $$E_n(y) \equiv y^{(n)} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_1 y) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(a_2 y) + \dots + (-1)^n (a_n y) = 0$$

Il CELS, in una sua notevole memoria [1], partendo dalla nota proprietà dovuta ad Jacobi e cioè che le soluzioni di $E_n(y) = 0$ sono i minori dell'ultima riga del wronskiano W di un sistema fondamentale

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi nella riunione del 7 giugno 1949.

[1] CELS, *Sur les equations differentielles lineaires ordinaires* (« Ann. de l'Ecole Normale Superieure », Tomo VIII).

di soluzioni di $E(y)=0$, divisi per il wronskiano stesso, generalizza notevolmente l'aggiunta di Lagrange, introducendo quelle che chiama le « *aggiunte di una data riga di* W » e cioè quelle equazioni che hanno per soluzioni i minori di una data riga di W, divisi per W. Si hanno così le n aggiunte $E_k(y)=0$ $(k=1,2,\dots n)$ dette rispettivamente aggiunte della $1^a, 2^a, \dots, n^{ma}$ riga di W [1]; indicando con $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione data $E(y)=0$ e con $(y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n})$ un sistema fondamentale di soluzioni di $E_k(y)=0$, avremo cioè per definizione:

$$y_{k,i} = \frac{1}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial y_i^{(k-1)}} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Per ottenere tali equazioni aggiunte il CELS stabilisce un procedimento che si rivela in pratica quasi irrealizzabile (eccetto che per $k=1$ e $k=n$ [2]) per l'enorme complessità di calcoli a cui conduce, come appare evidente tra l'altro da tutta una serie di lavori successivi tra cui, notevoli, quelli del GRUNFELD [3], nei quali si determinano le aggiunte della 2^a, 3^a, 4ª riga.

2. – Credo quindi utile, tanto più che in un'opportuna generalizzazione di ciò consiste il procedimento che ci permetterà, in maniera del tutto spontanea, di giungere alla definizione dell'aggiunto (di Lagrange) di un dato sistema differenziale lineare, accennare brevemente ad un metodo del tutto elementare che ci fa ottenere, ***mediante sole operazioni di derivazione e di eliminazione***, una qualunque aggiunta $E_k(y)=0$ di una data equazione lineare $E(y)=0$.

---

(1) L'aggiunta di Lagrange, evidentemente, non è che l'aggiunta dell'n^{ma} riga.

(2) Per $k=1$ si ha la così detta aggiunta della prima riga, che si trova esser definita da

$$E_1(y) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{y'}{a_n}\right) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{a_1 y'}{a_n}\right) + \dots + \\ + (-1)^{n-2}\frac{dx}{d}\left(\frac{a_{n-2}y'}{a_n}\right) + (-1)^{n-1}\left(\frac{a_{n-1}y'}{a_n}\right) + (-1)^n y = 0$$

(3) GRUNFELD, *Ueber den zusammenhang zwischen den Fundamentaldeterminanten einer linearen Differentialgleichungen n^{te} Ordnung und ihrer n Adjungirten* (« Journal fur die reine und angewandte Mathematik ». Vol. 15).

Per semplicità di scrittura, e dato che ciò non rappresenta alcuna limitazione al procedimento, supporremo $k = n$; sia allora

$$W = w(y_1 y_2 \ldots\ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots\ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

il wronskiano di un sistema fondamentale di soluzioni della [1], che indicheremo simbolicamente con

$$[y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}] \ ,$$

mentre indicheremo con il simbolo

$$[y, y', \ldots, y^{(k-1)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}]$$

uno qualunque dei suoi n minori della riga $(k+1)^{ma}$. Ciò premesso, ricordando la formula di Liouville $\frac{dW}{dx} = -a_1 W$ e posto $z_i = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial y_i^{(n-1)}}$ (per $i = 1, 2, \ldots, n$), cioè simbolicamente

$$z = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n-2)}]}{W} \ ,$$

derivando rispetto alla variabile indipendente x, si attiene

$$z' = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n-1)}]}{W} + a_1 z \ ;$$

derivando di nuovo segue

$$z'' = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-4)}, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}]}{W} + \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n)}]}{W} + \\ + \frac{a_1 [y, y', \ldots, y^{(n-3)}, y^{(n-1)}]}{W} + [a_1 z]'$$

o anche, eliminando $y^{(n)}$ per mezzo della [1]:

$$z'' = \frac{[y, y', \ldots, y^{(n-4)}, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}]}{W} - [a_2 z] + [a_1 z]' .$$

Così continuando, cioè derivando ed eliminando successivamente, otteniamo per z una equazione differenziale lineare dell'ordine n che non è altro, appunto, che l'aggiunta di Lagrange.

3. – Questo procedimento, se anche a prima vista può apparire un po' laborioso, per quanto di carattere del tutto elementare, ha in compenso il grande vantaggio di potersi applicare in generale, come appare evidente, alla determinazione di una qualunque $E_k(y) = 0$ (¹); inoltre tale procedimento, come si è sopra accennato, acquista per noi un'importanza del tutto particolare, per il fatto che ci permetterà di stabilire il sistema aggiunto di un dato sistema lineare.

§ 2. – Definizione e costruzione del sistema aggiunto (di Lagrange) di un dato sistema differenziale lineare ordinario.

4. – *Definizioni*: *a*) Un sistema differenziale lineare, in cui tutte le equazioni siano dell'ordine n, lo diremo *sistema differenziale lineare dell'ordine* n (²).

b) Un sistema differenziale lineare lo diremo *di classe* m se contiene m equazioni in altrettante funzioni incognite; diremo infine *rango del si-*

(¹) Per es. se volessimo l'aggiunta della seconda riga di $E(y) = y''' + ay' + by = 0$, porremmo $z = [y\,y'']$ da cui, derivando tre volte successivamente

$$z' = [y'y''] - a[y\,y'] ; \quad z'' + (az) = (b - a')[y\,y'] ; \quad z''' + (a' - b)\,z = (b' - a'')[y\,y']$$

ed eliminando $[y\,y']$ tra seconda e terza, segue senz'altro per l'equazione cercata

$$E_2(z) \equiv z''' - \frac{b' - a''}{b - a'} z'' - \left[b - a' - \frac{(b' - a'')\,a}{b - a'}\right] z = 0 .$$

(²) Se una (o più) equazioni del sistema fosse di ordine minore di n, potremmo sempre ridurci al caso generale, derivando l'equazione stessa un opportuno numero di volte. Osserviamo piuttosto che con questa definizione, l'*ordine* di un sistema lineare viene a significare qualche cosa di diverso da ciò che significa nelle equazioni lineari, per le quali l'ordine rappresenta *anche* il numero delle costanti arbitrarie che figurano nell'integrale generale.

stema il prodotto mn. Evidentemente *il rango di un sistema ci dà il numero delle costanti arbitrarie che figurano nel suo integrale generale.*

5. – Ciò premesso, consideriamo da prima sistemi di seconda classe e, per sola semplicità di scrittura, supponiamoli di terzo ordine, cioè

$$[2] \qquad \begin{cases} y''' + p_{11} y'' + p_{12} y' + p_{13} y + q_{11} z'' + q_{12} z' + q_{13} z = 0 \\ z''' + p_{21} y'' + p_{22} y' + p_{23} y + q_{21} z'' + q_{22} z' + q_{23} z = 0 \ ; \end{cases}$$

il rango del sistema è $6 = 2.3$ e quindi un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito da sei coppie di soluzioni, con determinante

$$[3] \qquad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' & y_6' \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' & z_5' & z_6' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' & y_5'' & y_6'' \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' & z_4'' & z_5'' & z_6'' \end{vmatrix}$$

non identicamente nullo; tale determinante lo diremo il *wronskiano del sistema* e si ha per esso, come subito si verifica derivando, la formula notevole, che diremo *la formula di Liouville relativa ai sistemi lineari;*

$$[4] \qquad \frac{dW}{dx} + (p_{11} + q_{21}) W = 0 \ .$$

Indicando simbolicamente il wronskiano con

$$W \equiv [y\, z\, y'\, z'\, y''\, z'']$$

e ponendo, con evidente notazione simbolica

$$[5] \qquad \eta = \frac{[y\, z\, y'\, z'\, z'']}{W} \ , \quad \zeta = -\frac{[y\, z\, y'\, z'\, y'']}{W} \ ,$$

andiamo a determinare il sistema lineare a cui soddisfano i sei valori possibili di η e ζ. Derivando le [5], eliminando le derivate terze y''', z'''

per mezzo del sistema [2] e tenendo conto di [4] si ottiene senz'altro

$$\eta' = \frac{[y\, z\, y''\, z'\, z'']}{W} + p_{11}\eta + p_{21}\zeta\,, \qquad \zeta' = \frac{-[y\, z\, y'\, z''\, y'']}{W} + q_{11}\eta + q_{21}\zeta\ ;$$

derivando ancora e procedendo analogamente segue

$$\begin{cases} \eta'' = \dfrac{[y'\, z\, y''\, z'\, z'']}{W} - p_{12}\eta - p_{22}\zeta + [p_{11}\eta]' + [p_{21}\zeta]' \\[2ex] \zeta'' = \dfrac{-[y\, z'\, y'\, z''\, y'']}{W} - q_{12}\eta - q_{22}\zeta + [q_{11}\eta]' + [q_{21}\zeta]' \end{cases}$$

ed infine, derivando una terza volta

$$[6] \quad \begin{cases} \}\eta''' - [p_{11}\eta]'' + [p_{12}\eta]' - [p_{13}\eta]\{ - \}[p_{21}\zeta]'' - [p_{22}\zeta]' + [p_{23}\zeta]\{ = 0 \\ \}\zeta''' - [q_{21}\zeta]'' + [q_{23}\zeta]' - [q_{23}\zeta]\{ - \}[q_{11}\zeta]'' - [q_{12}\zeta]' + [q_{13}\eta]\{ = 0 \end{cases}$$

che è il sistema differenziale cercato.

6. - Se ora indichiamo in generale con D^k l'operazione di derivazione $\dfrac{d^k}{dx^k}$, possiamo scrivere il sistema dato [2] sotto la forma simbolica

$$[2_1] \quad \begin{cases} [D^3 + p_{11}D^2 + p_{12}D + p_{13}]\, y + [q_{11}D^2 + q_{12}D + q_{13}]\, z = 0 \\ [p_{21}D^2 + p_{22}D + p_{23}]\, y + [D^3 + q_{21}D^2 + q_{22}D + q_{23}]\, z = 0 \end{cases}$$

o anche, più brevemente e sinteticamente:

$$[2_2] \quad \begin{cases} A_{11}(y) + A_{12}(z) = 0 \\ A_{21}(y) + A_{22}(z) = 0 \end{cases}$$

dove A_{11}, A_{22} indicano *due operatori differenziali lineari del terzo ordine e* A_{12}, A_{21} *due operatori differenziali lineari del secondo ordine,* del tipo, rispettivamente:

$$A_{ii} = D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3\ ; \quad A_{ik} = b_1 D^2 + b_2 D + b_3\ .$$

In base a questo simbolismo potremo scrivere il sistema trovato [6] sotto la forma

$$[6_1]\quad \begin{cases} [D^3 - D^2 p_{11} + D p_{12} - p_{13}]\eta - [D^2 p_{21} - D p_{22} + p_{23}]\zeta = 0 \\ -[D^2 q_{11} - D q_{12} + q_{13}]\eta + [D^3 - D^2 q_{21} + D q_{22} - q_{23}]\zeta = 0 \end{cases}$$

o anche

$$[6_2]\quad \begin{cases} A_{11}^{(0)}(y) - A_{21}^{(0)}(\zeta) = 0 \\ -A_{12}^{(0)}(\eta) + A_{22}^{(0)}(\zeta) = 0 \end{cases}$$

se con $A_{ik}^{(0)}$ indichiamo l'operatore aggiunto di A_{ik} nel senso che a questa parola si dà nella teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie. (Vedi formule [1] e [1_1]) (1).

7. – Procedendo analogamente in generale, potremo enunciare la seguente *definizione*: *Preso un sistema differenziale lineare di seconda classe e di ordine qualunque*

$$\begin{cases} [D^n + p_{11} D^{n-1} + p_{12} D^{n-2} + \ldots + p_{1,n-1} D + p_{1n}]\, y + \\ \qquad + [q_{11} D^{n-1} + q_{12} D^{n-2} + \ldots + q_{1,n-1} D + q_{1n}]\, z \equiv A_{11}(y) + A_{12}(z) = 0 \\ [p_{21} D^{n-1} + p_{22} D^{n-2} + \ldots + p_{2,n-1} D + p_{2n}]\, y + \\ + [D^n + q_{21} D^{n-1} + q_{22} D^{n-2} + \ldots + q_{2,n-1} D + q_{2n}]\, z \equiv A_{21}(y) + A_{22}(z) = 0 \end{cases}$$

(1) Il WILCZYNSKI nel suo classico libro «*Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*» (cap. V), per quanto mi consti, è l'unico che sino ad ora abbia trattato (nel caso particolare di $m = n = 2$) dei sistemi aggiunti; egli però considera sistemi aggiunti diversi dai nostri, assai più complicati e non esprimibili sotto la forma simbolica (6_2). Tale complicazione dipende dal fatto che invece di considerare le espressioni $\frac{[yzz']}{W}$, $\frac{-[yzy']}{W}$, considera le altre $\frac{[zy'y']}{W}$, $\frac{-[yy'z']}{W}$, cioè, in altre parole, considera quello che, secondo la terminologia del CELS, potremmo chiamare «*sistema aggiunto della prima coppia di righe*», mentre noi consideriamo il «*sistema aggiunto dell'ultima coppia di righe*» (o aggiunto di Lagrange). Anche il sistema aggiunto del WILCZINSKI, naturalmente, si può ottenere più rapidamente con il nostro procedimento di derivazione ed eliminazione, mentre egli lo ottiene in maniera assai faticosa e non facilmente generalizzabile.

chiamasi suo sistema aggiunto di Lagrange, il sistema, pure di seconda classe e di egual ordine

$$\begin{cases} [D^n - D^{n-1} p_{11} + D^{n-2} p_{12} + \ldots + (-1)^{n-1} D\, p_{1,n-1} + (-1)^n p_{1n}]\,\eta - \\ -[D^{n-1} p_{21} - D^{n-2} p_{22} + \ldots + (-1)^{n-2} D p_{2,n-1} + (-1)^{n-1} p_{2n}]\zeta \equiv A_{11}^{(0)}(\eta) - A_{21}^{(0)}(\zeta) = 0 \\ -[D^{n-1} q_{11} - D^{n-2} q_{12} + \ldots + (-1)^{n-2} D\, q_{1,n-1} + (-1)^{n-1}]\,\eta + \\ +[D^n - D^{n-1} q_{21} + D^{n-2} q_{22} + \ldots + (-1)^{n-1} D q_{2,n-1} + (-1)^n q_{2n}]\zeta \equiv -A_{12}^{(0)}(\eta) + A_{22}^{(0)}(\zeta) = 0 \end{cases}$$

dove con $A_{ik}^{(0)}$ *si indicano gli operatori differenziali lineari aggiunti degli operatori* A_{ik}.

8. – Come risulta evidente dalla natura stessa del processo di formazione dei sistemi aggiunti di classe 2, la definizione precedente si potrà senz'altro estendere al caso di un sistema differenziale di classe pari qualunque; però, per poter giustificare in generale la definizione che daremo di sistema aggiunto, occorre mostrare come tale processo valga anche per i sistemi di classe dispari.

A tale scopo consideriamo, per semplicità di scrittura, un sistema di classe 3 e ordine 2, che indicheremo simbolicamente nella seguente maniera

$$\begin{cases} [D^2 + p_{11} D + p_{12}]y + [q_{11} D + q_{12}]z + [r_{11} D + r_{12}]t \equiv A_{11}(y) + A_{12}(z) + A_{13}(t) = 0 \\ [p_{21} D + p_{22}]y + [D^2 + q_{21} D + q_{22}]z + [r_{21} D + r_{22}]t \equiv A_{21}(y) + A_{22}(z) + A_{23}(t) = 0 \\ [p_{31} D + p_{32}]y + [q_{31} D + q_{32}]z + [D^2 + r_{31} D + r_{32}]t \equiv A_{31}(y) + A_{32}(z) + A_{33} = 0 \end{cases}$$

Poichè il rango di esso è 6, un sistema fondamentale di soluzioni sarà formato con sei terne $(y_i, z_i, t_i)\,(i = 1, 2 \ldots 6)$ di soluzioni, tali che il determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 & y'_5 & y'_6 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 & z'_5 & z'_6 \\ t'_1 & t'_2 & t'_3 & t'_4 & t'_5 & t'_6 \end{vmatrix},$$

che chiameremo, al solito, *wronskiano del sistema*, non sia identicamente nullo. In questo caso la formula di Liouville diventa

$$[7] \qquad \frac{dW}{dx} + (p_{11} + q_{21} + r_{31})\, W = 0$$

ed allora ponendo

$$\eta = \frac{[y\, z\, t\, z'\, t']}{W}, \qquad \zeta = \frac{-[y\, z\, t\, y'\, z']}{W}, \qquad \tau = \frac{[y\, z\, t\, y'\, z']}{W}$$

andremo a stabilire il sistema differenziale a cui soddisfano le sei terne possibili di valori di η, ζ, τ. Derivando una prima volta ed eliminando le y'', z'', t'', mediante il sistema dato, a causa della [7], segue senz'altro

$$\left\{\begin{aligned} \eta' &= \frac{[y' z t z' t']}{W} + p_{11}\eta + p_{21}\zeta + p_{31}\tau, \qquad \zeta' = \frac{-[y z' t y' t']}{W} + q_{11}\eta + q_{21}\zeta + q_{31}\tau \\ \tau' &= \frac{[y\, z\, t'\, y'\, z']}{W} + r_{11}\eta + r_{21}\zeta + r_{31}\tau \end{aligned}\right.$$

e derivando ancora

$$\left\{\begin{aligned} \}\eta'' - [p_{11}\eta]' + [p_{12}\eta]\{ - \}[p_{21}\zeta]' - [p_{22}\zeta]\{ - \}[p_{31}\tau]' - [p_{32}\tau]\{ &= 0 \\ -\}[q_{11}\eta]' - [q_{12}\eta]\{ + \}\zeta'' - [q_{21}\zeta]' + [q_{22}\zeta]\{ - \}[q_{31}\tau]' - [q_{32}\tau]\{ &= 0 \\ -\}[r_{11}\eta]' - [r_{12}\eta]\{ - \}[r_{21}\zeta]' - [r_{22}\zeta]\{ + \}\tau'' - [r_{31}\tau] + [r_{32}\tau]\{ &= 0 \end{aligned}\right.$$

che possiamo senz'altro scrivere simbolicamente

$$\left\{\begin{aligned} A_{11}^{(0)}(\eta) - A_{21}^{(0)}(\zeta) - A_{31}^{(0)}(\tau) &= 0 \\ -A_{12}^{(0)}(\eta) + A_{22}^{(0)}(\zeta) - A_{32}^{(0)}(\tau) &= 0 \\ -A_{13}^{(0)}(\eta) - A_{23}^{(0)}(\zeta) + A_{33}^{(0)}(\tau) &= 0 \end{aligned}\right.$$

9. – In base a ciò che precede resta pienamemte giustificata la seguente

Definizione generale: *Preso un sistema differenziale lineare ordinario (di forma normale) di ordine e classe qualunque, che scriveremo sotto la forma simbolica*

$$[I] \quad \begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) + \dots + A_{1m}(y_m) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) + \dots + A_{2m}(y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}(y_1) + A_{m2}(y_2) + \dots + A_{mm}(y_m) = 0 \;, \end{cases}$$

diremo suo sistema aggiunto secondo Lagrange, il sistema lineare definito simbolicamente da

$$[II] \quad \begin{cases} A^{(0)}_{11}(\eta_1) - A^{(0)}_{21}(\eta_2) - \dots - A^{(0)}_{m1}(\eta_m) = 0 \\ -A^{(0)}_{12}(\eta_1) + A^{(0)}_{22}(\eta_2) - \dots - A^{(0)}_{m2}(\eta_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -A^{(0)}_{1m}(\eta_1) - A^{(0)}_{2m}(\eta_2) - \dots + A^{(0)}_{mm}(\eta_m) = 0 \end{cases}$$

dove gli A_{ii} *indicano operatori differenziali lineari dell'ordine n della forma*

$$A_{ii} \equiv D^n + a_{ii1} D^{n-1} + a_{ii2} D^{n-2} + \dots + a_{ii,n-1} D + a_{iin}$$

gli A_{ik} *indicano operatori differenziali lineari dell'ordine* $n-1$ *della forma*

$$A_{ik} \equiv a_{ik1} D^{n-1} a_{ik2} D^{n-2} + \dots + a_{ik,n-1} D + a_{ikn}$$

e gli $A^{(0)}_{ik}$ *indicano gli operatori differenziali lineari aggiunti degli* A_{ik} *cioè*

$$\begin{cases} A^{(0)}_{ii} \equiv D^n - D^{n-1} a_{ii1} + D^{n-2} a_{ii2} + \dots + (-1)^{n-1} D\, a_{ii,n-1} + (-1)^{n-1} a_{ikn} \\ A^{(0)}_{ik} \equiv D^{n-1} a_{ik1} - D^{n-2} a_{ik2} + \dots + (-1)^{n-2} D\, a_{ik,n-1} + (-1)^{n-1} a_{ikn} \end{cases}$$

Il sistema [II], aggiunto del sistema [I], ha come sistema fondamentate di soluzioni i minori delle ultime m righe del wronskiano del sistema [I], divisi per il wronskiano stesso e presi a segni alternati, cioè

$$[8] \quad \eta_i = \frac{(-1)^{i-1}}{W} W\left(y_1 \ldots y_m; y'_1 \ldots y'_m; \ldots; y_1^{(n-2)} \ldots y_m^{(n-2)}; y_1^{(n-1)} \ldots y_{i-1}^{(n-1)}, y_{i+1}^{(n-1)} \ldots y_m^{(n-1)}\right)$$

§ 3. – Proprietà fondamentali dei sistemi aggiunti.

10. – Indicando con W il wronskiano di un sistema fondamentale di soluzioni del sistema [I] e con $W^{(0)}$ quello del sistema aggiunto [II], relativo alle soluzioni corrispondenti secondo le [8], si ha il

Teorema I: *Il prodotto dei due Wronskiani è l'unità*(1), *cioè* $W \cdot W^{(0)} = 1$.

Senza limitare le generalità, limitiamoci, per semplicità di scrittura al caso di $m = 2$, $n = 3$; allora sarà 6 il rango del sistema e quindi i due wronskiani saranno dati da

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 & y'_5 & y'_6 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 & z'_5 & z'_6 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 & y''_5 & y''_6 \\ z''_1 & z''_2 & z''_3 & z''_4 & z''_5 & z''_6 \end{vmatrix}, \quad W^{(0)} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 & \zeta_6 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 & \eta'_5 & \eta'_6 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 & \zeta'_4 & \zeta'_5 & \zeta'_6 \\ \eta''_1 & \eta''_2 & \eta''_3 & \eta''_4 & \eta''_5 & \eta''_6 \\ \zeta''_1 & \zeta''_2 & \zeta''_3 & \zeta''_4 & \zeta''_5 & \zeta''_6 \end{vmatrix}.$$

Per la definizione delle η_i, ζ_i, in base alle proprietà fondamentali dei determinanti potremo senz'altro scrivere le identità

$$[9] \quad \begin{cases} \sum_{6}^{1}{}_i\, y_i \eta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, y'_i \eta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, y''_i \eta_i = 1 \\ \sum_{1}^{1}{}_i\, z_i \eta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, z'_i \eta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, z''_i \eta_i = 0 \end{cases}$$

$$[9_1] \quad \begin{cases} \sum_{1}^{6}{}_i\, y_i \zeta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, y'_i \zeta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, y_i'' \zeta_i = 0 \\ \sum_{1}^{6}{}_i\, z_i \zeta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, z'_i \zeta_i = 0 & \sum_{1}^{6}{}_i\, z_i'' \zeta_i = 1 \end{cases}$$

(1) Questo teorema estende ai sistemi quello dato dal Frobenius nel Vol. 77 del Giornale di Crelle e ritrovato per altra via dal Grunfeld (*loc. cit.* a nota (3), pag. 10), relativo ai wronskiani di un'equazione lineare e della sua aggiunta di Lagrange.

da cui, derivando le prime quattro delle [9] e [9_1] e tenendo conto delle [9] e [9_1] stesse, risulta anche

$$[10] \quad \begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\, \eta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, y'_i\, \eta'_i = -1 \\ \sum_1^6{}_i\, z_i\, \eta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, z'_i\, \eta'_i = 0 \end{cases}$$

$$[10_1] \quad \begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\, \zeta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, y'_i\, \zeta'_i = 0 \\ \sum_1^6{}_i\, z_i\, \zeta'_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, z'_i\, \zeta'_i = -1 \end{cases}$$

Ciò premesso eseguiamo il prodotto per righe dei due wronskiani ed avremo, per le relazioni precedenti

$$W\,W^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_1^6{}_i y_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y_i\, \zeta''_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_1^6{}_i z_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z_i\, \zeta''_i \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sum_1^6{}_i y'_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y'_i\, \zeta''_i \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sum_1^6{}_i z'_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z'_i\, \zeta''_i \\ 1 & 0 & \sum_1^6{}_i y''_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y''\, \zeta''_i & \sum_1^6{}_i y''_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y''_i\, \zeta''_i \\ 0 & 1 & \sum_1^6{}_i z''_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z''_i\, \zeta''_i & \sum_1^6{}_i z''_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z''_i\, \zeta''_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_1^6{}_i y_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i y_i\, \zeta''_i \\ \sum_1^6{}_i z_i\, \eta''_i & \sum_1^6{}_i z_i\, \zeta''_i \end{vmatrix}$$

Derivando ora le prime due delle [10], [10_1] e tenendo conto delle [10], [10_1] stesse segue anche

$$\begin{cases} \sum_1^6{}_i\, y_i\, \eta''_i = 1 & \sum_1^6{}_i\, z_i\, \eta''_i = 0 \\ \sum_1^6{}_i\, y_i\, \zeta''_i = 0 & \sum_1^6{}_i\, z_i\, \zeta''_i = 1 \end{cases} \quad (1)$$

(1) Con questo stesso procedimento, si possono ottenere le espressioni di tutte le sommatorie che figurano nel determinante prodotto $W\,W^{(0)}$, ma siccome tali espres-

da cui senz'altro

$$\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)} = 1 \qquad \text{c. d. d.}$$

11. – Ne segue il COROLLARIO I: *Se le* $r = mn$ emmuple

$$(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}) \qquad (i = 1, 2, \dots r)$$

costituiscono un sistema fondamentale per il sistema [I], *le soluzioni corrispondenti, secondo le* [8], *del sistema aggiunto* [II] *costituiscono pure un sistema fondamentale di soluzioni.*

12. – Consideriamo ora un qualunque sistema lineare [I] e il corrispondente sistema [II] e supponendo al solito, per semplicità di scrittura, $m = n = 3$, indichiamo con

$$\mathrm{L}_1(y),\ \mathrm{L}_2(y),\ \mathrm{L}_3(y)\ ;\quad \Lambda_1(\eta),\ \Lambda_2(\eta),\ \Lambda_3(\eta)$$

i primi membri delle equazioni dei due sistemi.

---

sioni non servono al nostro scopo ci limitiamo a riportarle, in quanto per sè interessanti:

$$\begin{cases} \sum y''_i \eta'_i = p_{11}, \quad \sum y''_i \zeta'_i = q_{11}, \quad \sum z''_i \eta'_i = p_{21}, \quad \sum z''_i \zeta'_i = q_{21} \\ \sum y'_i \eta''_i = -p_{11}, \quad \sum y'_i \zeta''_i = -q_{11}, \quad \sum z'_i \eta''_i = -q_{21}, \quad \sum z'_i \zeta''_i = -q_{21} \\ \sum y''_i \eta''_i = p'_{11} + p^2_{11} - p_{12} + q_{11} p_{21}, \quad \sum y''_i \zeta''_i = q'_{11} + q_{11}(p_{11} + q_{21}) - q_{12} \\ \sum z''_i Z''_i = q'_{11} + q^2_{21} - q_{22} + q_{11} p_{21}, \quad \sum z''_i \eta''_i = p'_{21} + p_{21}(p_{11} + q_{21}) - p_{22} \end{cases}$$

Del resto, che il prodotto $\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)}$ risultasse costante, si poteva vedere semplicemente nella seguente maniera: il sistema aggiunto ha come coefficienti di $\eta_i^{(n-1)}$ nella iesima equazione l'opposto del coefficiente della $y_i^{(n-1)}$ nella iesima equazione del sistema dato e quindi, per la formula di Liouville risulta

$$\frac{d\mathrm{W}}{dx} + \sum a_{ii1}\,\mathrm{W} = 0\ , \qquad \frac{d\mathrm{W}^{(0)}}{dx} - \sum a_{ii1}\,\mathrm{W}^{(0)} = 0$$

da cui

$$\frac{d(\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)})}{dx} = \mathrm{W}^{(0)}\,\frac{d\mathrm{W}}{dx} + \mathrm{W}\,\frac{d\mathrm{W}^{(0)}}{dx} = 0$$

cioè $\mathrm{W}\,\mathrm{W}^{(0)} = \text{cost.}^{\text{te}}$. Ma l'importanza del teorema consiste nel verificare che la costante è diversa da zero.

Detto allora η_1, η_2, η_3 tre funzioni del tutto arbitrarie della x (purchè derivabili quanto occorre) andiamo a calcolarci l'espressione

$$\int (\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \eta_3 L_3)\, dx \;;$$

integrando per parti e tenendo conto delle identità

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \eta y''' dx = \eta y'' - \eta' y' + \eta'' y - \int y \eta''' dx \\ \int \eta a_{inl} y'' dx = y' [a_{inl} \eta] - y [a_{inl} \eta]' + \int y [a_{inl} \eta]'' dx \\ \int \eta a_{inl} y' dx = y [a_{inl} \eta] - \int y [a_{inl} \eta]' dx \end{array} \right.$$

risulta senz'altro

$$\int (\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \eta_3 L_3) dx = \sum_1^3{}_i (\eta_i y'' - \eta_i' y'_i + \eta_i'' y_i) + \sum_1^3{}_k \Big\} y'_k \sum_1^3{}_i a_{ik1} \eta_i \Big\{ - \sum_1^3{}_k \Big\} y_k \sum_1^3{}_i [a_{ik1} \eta_i]' \Big\{ +$$
$$+ \sum_1^3{}_k \Big\} \sum_1^3{}_i a_{ik2} \eta_i \Big\{ - \int (y_1 \Lambda_1 + y_2 \Lambda_2 + y_3 \Lambda_3)\, dx$$

da cui si deduce che l'espressione

$$\int \sum_1^3{}_i (\eta_i L_i)\, dx + \int \sum_1^3{}_i (y_i \Lambda_i)\, dx$$

risulta eguale ad un'espressione bilineare nelle y_i, η_i e nelle loro derivate prime e seconde. Procedendo analogamente in generale, possiamo enunciare il

TEOREMA II: *L'espressione*

$$\int \sum_1^m{}_i (\eta_i L_i)\, dx + \int \sum_1^m{}_i (y_i \Lambda_i)\, dx$$

dove $L_i(y)$, $\Lambda_i(\eta)$ *indicano rispettivamente i primi membri di un sistema differenziale lineare di ordine* n *e di classe* m *e del suo aggiunto, risulta eguale ad un'espressione bilineare nelle* y_i, η_i *e nelle loro derivate sino dll'ordine* $n-1$.

Indicando tale espressione bilineare con $\psi\binom{y}{\eta}$, si ha quindi la formula fondamentale

[III] $$\int \Big\} \sum_1^m{}_i \eta_i L_i + \sum^m{}_i y_i \Lambda_i \Big\{ dx = \psi\binom{y}{\eta} \;;$$

l'espressione $\psi\binom{y}{\eta}$, in analogia a quanto si fa per le equazioni lineari, si chiamerà *l'espressione bilineare aggiunta* del sistema dato [I].

13. – Supponiamo ora che $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ sia una soluzione del sistema aggiunto; allora dalla [III] segue il Corollario II:

Se $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ *rappresenta una soluzione del sistema aggiunto di un dato sistema lineare, l'espressione*

$$\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \ldots + \eta_m L_m$$

risulta la derivata esatta di un'espressione bilineare nelle y_i, η_i *e nelle loro derivate sino all'ordine* $n-1$.

Infatti, sotto tale ipotesi, dalla [III] segue

$$[III_1] \qquad \eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \ldots + \eta_m L_m = \frac{d}{dx}\psi\binom{y}{\eta}$$

14. – Sia ora $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ una soluzione del sistema dato; dalla $[III_1]$ si ottiene

$$\psi\binom{y}{\eta} = \text{cost.}^{te}$$

cioè l'equazione $\psi\binom{y}{\eta} = \text{cost.}^{te}$ ci fornisce un *integrale primo del sistema* [I]; se ne deduce che una volta integrato completamente il sistema aggiunto [II], cioè noti $r = mn$ sistemi $(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_m})$ (per $i = 1, 2, \ldots, r$) di soluzioni linearmente indipendenti, gli r integrali primi

$$\psi_i\binom{y_i}{\eta_i} = c_i \qquad (c_i = \text{cost.}^{te},\ i = 1, 2, \ldots r)$$

determineranno in una ed in una sola maniera altrettanti r sistemi $(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_r})$ di soluzioni linearmente indipendenti del sistema dato [I], che quindi risulterà completamente integrato.

Analogamente, a causa della simmetria della [III], integrato il sistema dato, risulta integrato il sistema aggiunto e quindi possiamo enunciare il

Teorema III: *I due problemi di integrare un dato sistema lineare o il suo aggiunto sono del tutto equivalenti.*

15. – I risultati espressi dai teoremi [II] e [III] si possono ottenere anche più semplicemente per un'altra via che ha inoltre il vantaggio di determinarci immediatamente la forma esplicita dell'espressione bilineare aggiunta $\psi\binom{y}{\eta}$.

Proponiamoci a questo scopo di vedere se esistono $r = mn$ funzioni $A_{ik}(x)$ per $i = 1, 2, \dots m$; $k = 1, 2, \dots n$ tali che risulti identicamente

[11] $$\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2 + \dots + \eta_m L_m = \frac{d}{dx} \sum_1^m{}_i \sum_1^n{}_k A_{ik}\, y_i^{(m-k)} \quad ;$$

sostituendo alle L_i le loro espressioni ed eseguendo i calcoli per il caso di $m = n = 3$ risulta:

$$\sum_1^3{}_s \eta_s y_s''' + \sum_1^3{}_s \left\{ y_s'' \left(\sum_1^3{}_i a_{is1} \eta_i \right) \right\} + \sum_1^3{}_s \left\{ y_s' \left(\sum_1^3{}_i a_{is2} \eta_i \right) \right\} + \sum_1^3{}_s \left\{ y_s \left(\sum_1^3{}_i a_{is3} \eta_i \right) \right\} =$$
$$= \sum_1^3{}_s A_{s1} y_s''' + \sum_1^3{}_s \left\{ y_s''(A_{s2} + A'_{s1}) \right\} + \sum_1^3{}_s \left\{ y'_s (A_{s3} + A'_{s2}) \right\} + \sum_1^3{}_s y_s A'_{s3}$$

da cui, eguagliando i coefficienti

[12] $$\begin{cases} A_{s1} = \eta_s \ , \qquad A_{s2} + A'_{s1} = \sum\limits_1^3 a_{is1} \eta_s \\ \qquad\qquad A_{s3} + A'_{s2} = \sum\limits_1^3{}_i a_{is2} \eta_s \ , \quad A'_{s3} = \sum\limits_1^3{}_i a_{is3} \eta_s \\ \qquad\qquad\qquad \text{per } s = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Dalle ultime delle [12] segue

$$A'_{s3} + A''_{s2} = \sum_1^3{}_i [a_{is2} \eta_s]' \ , \quad A''_{s2} + A'''_{s1} = \sum_1^3{}_i [a_{is1} \eta_s]'' \ , \quad A'''_{s1} = \eta_{s3}'''$$

da cui

$$A'''_{s1} - A'_{s3} = \sum_1^3 [a_{is1} \eta_s]'' - \sum_1^3{}_i [a_{is2} \eta_s]'$$

ed infine

$$\Lambda_s(\eta) = \eta_s''' - \sum_1^3{}_i [a_{is1} \eta_s]'' + \sum_1^3{}_i [a_{is2} \eta_s]' - \sum_1^3{}_i [a_{is3} \eta_s] = 0 \ .$$

Se ne conclude che la [11] è possibile purchè si prendano per le funzioni

$$A_{11}\,,\; A_{21}\,,\; A_{31}$$

una soluzione del sistema aggiunto e per le altre A_{ik} le espressioni

$$A_{s2} = \sum_1^3{}_i [a_{is1}\,\eta_s] - \eta'_s\,,\quad A_{s2} = \sum_1^3{}_i [a_{is2}\,\eta_s]' - \sum_1^3{}_i [a_{is1}\,\eta_s] + \eta''_s$$

che si deducono dalle [12].

16. – La proprietà espressa dalla [III] e cioè che l'espressione

$$[13] \qquad \sum_1^m{}_i\,\eta_i\,L_i + \sum_1^m{}_i\,y_i\,\Lambda_i$$

sia la derivata esatta della forma bilineare aggiunta $\psi\binom{y}{\eta}$ è caratteristica per i sistemi aggiunti; si ha cioè il

Teorema IV: *Presi due sistemi lineari di egual ordine e classe*

$$L_i(y) = 0\;,\quad \Lambda^*_i(\eta) = 0\;,$$

se per tutte le possibili funzioni della x risulta che

$$[14] \qquad \sum_1^m{}_i\,\eta_i\,L_i + \sum_1^m{}_i\,y_i\,\Lambda^*_i$$

diventa la derivata esatta della forma bilineare aggiunta $\psi^*\binom{y}{\eta}$ relativa ai sistemi $L_i(y) = 0$, $\Lambda^*_i(y) = 0$, necessariamente il sistema $\Lambda^*_i(y) = 0$ coincide col sistema aggiunto del sistema dato $L_i(y) = 0$.

Infatti sottraendo membro a membro le [13] e [14] segue

$$\sum_1^m{}_i\,y_i \left\{ \Lambda_i(\eta) - \Lambda^*_i(\eta) \right\} = \frac{d}{dx}\,(\psi - \psi^*)$$

da cui si deduce, osservando il primo membro, che l'espressione

$$\frac{d}{dx}\,(\psi - \psi^*)$$

dovrebbe risultare un'espressione lineare nelle sole y_i (e non anche nelle derivate) il che, evidentemente, è impossibile, data la natura delle ψ; dovrà quindi essere

$$\Lambda_i(\eta) - \Lambda_i^*(\eta) \equiv 0 \quad \text{cioè} \quad \Lambda_i(\eta) \equiv \Lambda_i^*(\eta)$$

(e quindi $\psi - \psi^* = \text{cost.}^{\text{te}}$) il che dimostra l'asserto.

17. – Da questo teorema discende poi immediatamente il seguente

COROLLARIO III: *L'aggiunto dell'aggiunto è il sistema dato* (proprietà di reciprocità dei sistemi aggiunti).

Infatti sia $\lambda_i(y^*) = 0$ l'aggiunto del sistema aggiunto $\Lambda_i(\eta) = 0$; avremo

$$\sum_1^m {}_i\, y_i^* \Lambda_i + \sum_1^m {}_i\, \eta_i \lambda_i = \psi_* \binom{\eta}{y^*}, \quad \sum_1^m {}_i\, y_i \Lambda_i + \sum_1^m {}_i\, \eta_i \mathrm{L}_i = \psi \binom{y}{\eta}$$

e quindi, per ciò che precede

$$\lambda_i \equiv \mathrm{L}_i \, .$$


PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII – N. 3
pag. 29-54

SULLE VARIETÀ RIEMANNIANE NORMALI A TRE DIMENSIONI (*)

ANGELO TONOLO

SVMMARIVM. — Varietas riemanniana trium dimensionum dicitur regularis seu normalis cum ex tribus ipsius congruentiis principalibus effici possit triplex quoddam systema ortogonale superficiei. Hac in Nota ostendit Auctor aequationes necessarias et sufficientes quibus satisfacere debent componentes intrinsecae duplicis tensoris covariantis RICCI, vel componentes tensoris fundamentalis varietatis, ut varietas ipsa vere normalis sit.

PREFAZIONE

Come è noto, il BIANCHI ha chiamato *normali* quelle varietà riemanniane a tre dimensioni nelle quali le congruenze principali sono normali, nelle quali, cioè, le linee di tali congruenze sono le traiettorie ortogonali di un triplo sistema ortogonale di superficie. Sorge spontaneo il problema di caratterizzare tutte le varietà V_3 nelle quali si verifica tale circostanza.

Al problema ho dato dapprima, com'era naturale, una trattazione puramente geometrica: fissata in V_3 una, comunque scelta, terna ortogonale di congruenze di linee, i canoni della geometria intrinseca del RICCI permettono di determinare una terna di invarianti $r'_i (i=1,2,3)$, il cui annullarsi caratterizza le congruenze principali normali della varietà. I §§ I e II servono per dare a queste funzioni quella forma che è essenziale per lo sviluppo dei calcoli seguenti e per stabilire un'identità che è fondamentale: essa è fornita da un giudizioso trasporto alle varietà riemanniane di una identità chè il WEINGARTEN segnalò in un problema di elasticità per lo spazio ordinario e in

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella Riunione del 7 giugno 1949.

coordinate cartesiane. Nel § IV si mostra che l'annullamento simultaneo degli invarianti r_i', porta, in forza della identità in discorso, all'annullamento di altri tre invarianti I_i. Pertanto, le varietà normali V_3 sono caratterizzate dall'essere identicamente nulle tali funzioni I_i. Queste sono scritte in una forma assai compendiosa, e contengono solo elementi geometrici della varietà, quali sono i coefficienti di rotazione di RICCI della fissata terna di congruenze di linee, le componenti intrinseche del tensore doppio di RICCI, che in tale varietà sostituisce con vantaggio quello quadruplo di RIEMANN-CHRISTOFFEL, e loro derivate ordinarie rispetto agli archi delle linee della terna fissata.

Nell'ultimo § le equazioni $I_i = 0$ vengono trasformate in modo da ottenerne altre tre, ove figurano le componenti del tensore fondamentale della varietà, le componenti del tensore doppio di RICCI e loro derivate covarianti rispetto al ds^2 di V_3, cioè, in definitiva, le equazioni caratteristiche delle varietà normali contengono solo operazioni di derivazione eseguite sulle componenti del tensore fondamentale della varietà fino a quelle del terz'ordine incluso (1).

§ I. – PRELIMINARI

1. – Sia $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho, \tau;\ h, k, i, j, l, p, q, r, s = 1, 2, 3)$

[1] $$ds^2 = a_{\mu\nu}(x^\lambda)\, dx^\mu\, dx^\nu$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà riemanniana V_3 a tre dimensioni con riferimento alle variabili x^λ. Denotiamo con $\alpha_{\mu\nu}$ le componenti del tensore doppio covariante simmetrico di RICCI, che nelle V_3 sostituisce con vantaggio il tensore quadruplo di RIEMANN-CHRISTOFFEL. Supporremo che tale varietà abbia distinte le sue tre curvature principali, cioè, che siano distinte le tre radici dell'equazione cubica in ρ

[2] $$D(\rho) = \|\alpha_{\mu\nu} - \rho\, a_{\mu\nu}\| = 0\ .$$

In tale ipotesi, il sistema di equazioni lineari ed omogenee nelle incogite $\underset{h}{z}^\nu$

[3] $$(\alpha_{\mu\nu} - \rho_h\, a_{\mu\nu})\, \underset{h}{z}^\nu = 0\ , \quad (\mu = 1, 2, 3)\ ,$$

(1) Un riassunto della presente Memoria si trova nella mia Nota: *Sulle varietà riemanniane a tre dimensioni.* « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », seri 8ª, Vol. VI, (1949).

ammette, per ogni radice ρ_h della [2], una e una sola soluzione

$$\underset{h}{z}^{\nu} = \underset{h}{\lambda}'^{\nu} ,$$

per la quale si ha

[4] $$a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{h}{\lambda}'^{\nu} = 1 .$$

Inoltre, a due radici distinte ρ_h, ρ_k della equazione [2], corrispondono due soluzioni

$$\underset{h}{z}^{\nu} = \underset{h}{\lambda}'^{\nu} , \quad \underset{k}{z}^{\nu} = \underset{k}{\lambda}'^{\nu}$$

vincolate fra loro dalla relazione

[5] $$a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{k}{\lambda}'^{\nu} = 0 .$$

Pertanto, nella fatta ipotesi, è sempre possibile determinare nella V_3 una e una sola terna di congruenze di linee di parametri $\underset{h}{\lambda}'^{\nu}$ che soddisfano alle [4], [5]; queste si possono compendiare nella scrittura

[6] $$a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{k}{\lambda}'^{\nu} = \delta_{hk} ,$$

ove δ_{hk} denota il simbolo di Kronecker. Le linee di tale congruenza sono quindi mutuamente ortogonali nella varietà V_3. Denotando con $\underset{h}{\lambda}'_{\nu}$ i momenti della congruenza in discorso, definiti dalle posizioni

$$\underset{h}{\lambda}'_{\nu} = a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} ,$$

alle [6] possiamo dare la forma

$$\underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{k}{\lambda}'_{\mu} = \delta_{hk} .$$

Queste identità, come è notissimo, sono equivalenti alle seguenti:

[7] $$\underset{h}{\lambda}'_{\mu} \underset{h}{\lambda}'^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} ,$$

essendo sempre δ^{ν}_{μ} il simbolo di Kronecker.

Le tre congruenze di linee individuate dai parametri $\underset{h}{\lambda}'^{\nu}$ o dai momenti $\underset{h}{\lambda}'_{\nu}$, si chiamano le *congruenze principali della varietà* V_3. L'insieme delle tre congruenze verrà in seguito indicato con Λ'.

2. – Per il seguito, è opportuno sottoporre il sistema [3] ad una trasformazione. A questo scopo, associamo alla terna principale Λ' di congruenze una seconda terna ortogonale di congruenze, comunque

scelta in V_3, che denoteremo con Λ, i cui parametri e momenti verranno indicati rispettivamente con λ_h^{ν}, $\lambda_{h\,\nu}$. Avremo intanto le relazioni

$$[8] \qquad \lambda_h^{\mu}\,\lambda_{k\,\mu} = \delta_{hk} \ , \qquad \lambda_{h\,\mu}\,\lambda_h^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \ .$$

Designiamo rispettivamente con $[h]$, $[h']$ le congruenze delle due terne Λ e Λ', con h, h' le linee di queste congruenze passanti per un medesimo punto di V_3, e infine con β_{hk} i coseni degli angoli formati dalle linee delle due terne, sulle quali, naturalmente, è stato fissato un verso come positivo, e precisamente, β_{hk} indica il coseno dell'angolo che la linea h' forma con la linea k passanti per uno stesso punto della varietà. Si ha

$$[9] \qquad \beta_{hk} = \lambda_h'^{\mu}\,\lambda_{k\,\mu} \ .$$

Avendosi

$$\lambda_{h\,\mu} = a_{\mu\nu}\,\lambda_h^{\nu} \ ,$$

si trae, in forza del secondo gruppo delle [8],

$$[10] \qquad a_{\mu\nu} = \lambda_{h\,\mu}\,\lambda_{h\,\nu} \ .$$

Introduciamo gli invarianti ω_{hk} definiti dalle posizioni.

$$[11] \qquad \alpha_{\mu\nu} = \omega_{ij}\,\lambda_{i\,\mu}\,\lambda_{j\,\nu} \ .$$

Dalle identità

$$(\alpha_{\mu\nu} - \rho_h\,a_{\mu\nu})\,\lambda_h'^{\nu} = 0 \ , \quad (\mu = 1, 2, 3) \ ,$$

ricaviamo, sostituendovi le [10], [11],

$$(\omega_{ij}\,\lambda_{i\,\mu}\,\lambda_{j\,\nu} - \rho_h\,\lambda_{i\,\mu}\,\lambda_{i\,\nu})\,\lambda_h'^{\nu} = 0 \ ,$$

od anche, in virtù delle [9],

$$(\omega_{ij}\,\beta_{hj} - \rho_h\,\beta_{hi})\,\lambda_{i\,\mu} = 0 \ , \quad (\mu = 1, 2, 3) \ .$$

Moltiplicando queste identità per λ_k^{μ}, sommando rispetto a μ, otteniamo, tenendo conto del primo gruppo delle [8],

$$[12] \qquad \omega_{kj}\,\beta_{hj} - \rho_h\,\beta_{hk} = 0 \ , \quad (k = 1, 2, 3) \ ,$$

cioè, per un fissato h, il sistema delle tre identità

$$[12_1] \qquad \begin{cases} (\omega_{11} - \rho_h)\beta_{h1} + \omega_{12}\beta_{h2} + \omega_{13}\beta_{h3} = 0 , \\ \omega_{21}\beta_{h1} + (\omega_{22} - \rho_h)\beta_{h2} + \omega_{23}\beta_{h3} = 0 , \\ \omega_{31}\beta_{h1} + \omega_{32}\beta_{h2} + (\omega_{33} - \rho_h)\beta_{h3} = 0 . \end{cases}$$

Pertanto, le ρ_h sono radici dell'equazione cubica in ρ

$$[13] \qquad \| \omega_{hk} - \rho\, \delta_{hk} \| = 0 .$$

3. – Denotiamo con γ'_{hij}, γ_{hij} rispettivamente i coefficienti di rotazione di RICCI relativi alle due terne Λ' e Λ, definiti dalle posizioni

$$[14] \quad \gamma'_{hij} = \underset{i}{\lambda}'^{\mu} \underset{j}{\lambda}'^{\nu} \nabla_\nu \underset{h}{\lambda}'_{\mu} , \qquad [15] \quad \gamma_{hij} = \underset{i}{\lambda}^{\mu} \underset{j}{\lambda}^{\nu} \nabla_\nu \underset{h}{\lambda}_{\mu} = \underset{i}{\lambda}_{\mu} \underset{j}{\lambda}_{\nu} \nabla^\nu \underset{h}{\lambda}^{\mu} .$$

ove il simbolo ∇_ν (∇^ν) denota derivazione covariante (contravariante) rispetto alla forma [1]. Per il seguito, interessa esprimere le γ'_{hij} per le γ_{hij}. A questo scopo, osserviamo che si trae dalle [9]

$$\underset{h}{\lambda}'_{\mu} = \beta_{hk} \underset{k}{\lambda}_{\mu} ,$$

donde, derivando covariantemente rispetto alla forma [1],

$$\nabla_\nu \underset{h}{\lambda}'_{\mu} = \beta_{hk} \nabla_\nu \underset{k}{\lambda}_{\mu} + \underset{k}{\lambda}_{\mu} \nabla_\nu \beta_{hk} .$$

Ma dalle [15] si ottiene, in virtù del secondo gruppo delle [8],

$$\nabla_\nu \underset{h}{\lambda}_{\mu} = \gamma_{hij} \underset{i}{\lambda}_{\mu} \underset{j}{\lambda}_{\nu} ,$$

quindi, sostituendo nelle [14], si ricava, per le [9],

$$\gamma'_{hij} = \beta_{hk}\beta_{ip}\beta_{jq}\gamma_{kpq} + \beta_{ik} \underset{j}{\lambda}'^{\nu} \nabla_\nu \beta_{hk} .$$

Indichiamo con il simbolo ∂_j derivazione ordinaria rispetto all'arco σ_j della linea j; si ha, per un generico scalare $f(x^\lambda)$,

$$[16] \qquad \partial_j f(x^\lambda) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} f(x^\lambda) \frac{dx^\nu}{d\sigma_j} = \underset{j}{\lambda}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} f(x^\lambda) = \underset{j}{\lambda}^{\nu} \nabla_\nu f(x^\lambda) .$$

Avendosi

$$\underset{h}{\lambda}'^{\nu} = \beta_{hk} \underset{k}{\lambda}^{\nu} ,$$

tenendo conto delle [16], risulta

$$\gamma'_{hij} = \beta_{jq}\left[\beta_{ip}\,\beta_{hk}\,\gamma_{kpq} + \beta_{ik}\,\partial_q\,\beta_{hk}\right] . \tag{17}$$

Queste formule risolvono il problema che ci eravamo proposto. Ad esse si può attribuire un'altra forma. Intanto osserviamo che, essendo nove il numero dei coefficienti di rotazione distinti nella V_3 di una generica terna ortogonale di congruenze di linee, possiamo liberarci dalla notazione a tre indici, per sostituirvi quella a due indici, ponendo (¹)

$$\rho'_{hk} = \gamma'_{h+1\,h+2\,k} \; , \quad \rho_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2\,k} \; . \tag{18}$$

Ricordando che

$$\gamma_{kkq} = 0 \; , \quad \gamma_{kpq} + \gamma_{pkq} = 0 \; ,$$

si trae dalle [17], con ovvio scambio di indici,

$$\gamma'_{h+1\,h+2\,k} = \beta_{kq}\left[\beta_{h+2\,i+1}\,\beta_{h+1\,i} - \beta_{h+2\,i}\,\beta_{h+1\,i+1}\right]\gamma_{i\,i+1\,q} + \beta_{kq}\,\beta_{h+2\,i}\,\partial_q\,\beta_{h+1\,i} \, . \tag{19}$$

Ma nel determinante $[\beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i+1}\,\beta_{h+2\,i+2}]$ l'elemento β_{hi+2} è eguale al suo complemento algebrico, cioè alla differenza che figura fra le parentesi quadre [ ] dei secondi membri delle [19]. Abbiamo pertanto le formule definitive, scambiando q in j,

$$\rho'_{hk} = \beta_{kj}\left[\beta_{hi}\,\rho_{ij} + \beta_{h+2\,i}\,\partial_j\,\beta_{h+1\,i}\right] . \tag{20}$$

§ II. – Condizioni di normalità delle tre congruenze principali. Identità fondamentale

1. – In un generico punto P della V_3 consideriamo le tre linee h' che appartengono alle tre congruenze principali $[h']$ e le tre giaciture ad esse rispettivamente perpendicolari. In generale, queste tre giaciture non saranno tangenti ad un sistema triplo di superficie necessariamente ortogonali nel punto P.

(¹) Ora, e in seguito, considereremo equivalenti gli indici che differiscono tra loro per tre o per un multiplo di tre.

Noi vogliamo caratterizzare quelle varietà V_3 nelle quali invece si verifica tale circostanza, non solo nel punto P, ma in ogni altro punto della varietà. Per tali V_3, e solo per esse, accadrà che le linee principali costituiranno le traiettorie ortogonali di un sistema triplo di superficie ortogonali, cioè le congruenze principali saranno *normali*. Come dicemmo nella Prefazione, il BIANCHI chiamava allora *normale* la varietà corrispondente (¹).

Prendiamo in considerazione la congruenza $[h']$, e ricordiamo che essa è normale solo e soltanto quando è nullo l'invariante

$$[21] \qquad r'_h = \rho'_{h+1\,h+1} + \rho'_{h+2\,h+2} \,.$$

Dalle [20] ricaviamo

$$\begin{cases} \rho'_{h+1\,h+1} = \beta_{h+1\,j}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{ij} + \beta_{hi}\,\partial_j\,\beta_{h+2\,i}] \,, \\ \rho'_{h+2\,h+2} = \beta_{h+2\,j}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{ij} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_j\,\beta_{hi}] \,. \end{cases}$$

Possiamo scrivere

$$\rho'_{h+1\,h+1} = \beta_{h+1\,i}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{ii} + \beta_{hi}\,\partial_i\,\beta_{h+2\,i}] + \beta_{h+1\,i+1}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{i\,i+1} + \beta_{hi}\,\partial_{i+1}\,\beta_{h+2\,i}] + $$
$$+ \beta_{h+1\,i+2}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{i\,i+2} + \beta_{hi}\,\partial_{i+2}\,\beta_{h+2\,i}] \,,$$

$$\rho'_{h+2\,h+2} = \beta_{h+2\,i}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{ii} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_i\,\beta_{hi}] + \beta_{h+2\,i+1}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{i\,i+1} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_{i+1}\,\beta_{hi}] + $$
$$+ \beta_{h+2\,i+2}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{i\,i+2} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_{i+2}\,\beta_{hi}] \,,$$

donde, sommando, si ricava

$$[22] \qquad r'_h = \rho_{ii}[\beta^2_{h+1\,i} + \beta^2_{h+2\,i}] + \rho_{i\,i+1}[\beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+1\,i+1} + \beta_{h+2\,i}\,\beta_{h+2\,i+1}] +$$
$$+ \rho_{i\,i+2}[\beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+1\,i+2} + \beta_{h+2\,i}\,\beta_{h+2\,i+2}] +$$
$$+ \beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i}\,\partial_i\,\beta_{h+2\,i} + \beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+2\,i}\,\partial_i\,\beta_{hi} +$$
$$+ \beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i+1}\,\partial_{i+1}\,\beta_{h+2\,i} + \beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+2\,i+1}\,\partial_{i+1}\,\beta_{hi} +$$
$$+ \beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i+2}\,\partial_{i+2}\,\beta_{h+2\,i} + \beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+2\,i+2}\,\partial_{i+2}\,\beta_{hi} \,.$$

(¹) BIANCHI, *Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche*, [«Annali di matematica», Serie III, Tomo XXIII, (1914)]. È in questa Memoria [§ 2] che il BIANCHI adopera per la prima volta tale locuzione.

Si ha

$$[23]\begin{cases} \rho_{ii}[\beta^2_{h+1i}+\beta^2_{h+2i}]=\rho_{ii}[1-\beta^2_{hi}]=\rho_{ii}[\beta^2_{hi+1}+\beta^2_{hi+2}]=[\rho_{i+1i+1}+\rho_{i+2i+2}]\beta^2_{hi}\ , \\ \rho_{ii+i}[\beta_{h+1i}\beta_{h+1i+1}+\beta_{h+2i}\beta_{h+2i+1}]=-\rho_{ii+1}\beta_{hi}\beta_{hi+1}\ , \\ \rho_{ii+2}[\beta_{h+1i}\beta_{h+1i+2}+\beta_{h+2i}\beta_{h+2i+2}]=-\rho_{ii+2}\beta_{hi}\beta_{hi+2}=-\rho_{i+1i}\beta_{hi}\beta_{hi+1}\ , \end{cases}$$

$$[24]\quad \beta_{hi}\beta_{h+1i}\partial_i\beta_{h+2i}+\beta_{h+2i}\beta_{h+1i}\partial_i\beta_{hi}=-\beta_{h+1i}[\beta_{hi+1}\partial_i\beta_{h+2i+1}+ \\ +\beta_{h+2i+1}\partial_i\beta_{hi+1}+\beta_{hi+2}\partial_i\beta_{h+2i+2}+\beta_{h+2i+2}\partial_i\beta_{hi+2}]\ .$$

Con ovvî scambi di indici si vede allora che quella parte di sommatoria che figura nelle [22], i cui addendi contengono le derivate rispetto agli archi σ_j, si riduce soltanto alla sommatoria

$$[25]\quad \beta_{h+2i+1}\beta_{h+1i}\partial_{i+1}\beta_{hi}+\beta_{h+2i+2}\beta_{h+1i}\partial_{i+2}\beta_{hi}-\beta_{h+1i+2}\beta_{h+2i}\partial_{i+2}\beta_{hi}- \\ -\beta_{h+1i+1}\beta_{h+2i}\partial_{i+1}\beta_{hi}=\beta_{hi+2}\partial_{i+1}\beta_{hi}-\beta_{hi+1}\partial_{i+2}\beta_{hi}= \\ =\beta_{hi}[\partial_{i+2}\beta_{hi+1}-\partial_{i+1}\beta_{hi+2}]\ .$$

In virtù delle [23], [24], [25], risulta dalle [22], scambiando l'indice i in k,

$$[26]\qquad r'_h=\beta_{hh}[\partial_{k+2}\beta_{hk+1}-\partial_{k+1}\beta_{hk+2}]+\beta^2_{hk}\Gamma_{kk}+\beta_{hk}\beta_{hk+1}\Gamma_{kk+1}\ ,$$

ove

$$[27]\qquad \Gamma_{kk}=\rho_{k+1k+1}+\rho_{k+2k+2}\ ,\qquad\qquad [28]\qquad -\Gamma_{kk+1}=\rho_{kk+1}+\rho_{k+1k}\ .$$

Concludiamo pertanto che la congruenza $[h']$ è normale quando

$$[29]\qquad\qquad r'_h=0\ ,$$

ove r'_h ha l'espressione [26], e soltanto in questo caso.

2. – Facciamo le posizioni

$$[30]\qquad\qquad g_{hk}=\omega_{hk}-\rho\,\delta_{hk}\ ,$$

considieriamo i due determinanti

$$[31]\quad G(\rho)=\|g_{hk}\|\ ,\qquad\qquad [32]\quad \Omega=\|\omega_{hk}\|\ ,$$

e designiamo con G_{hk} il complemento algebrico dell'elemento g_{hk} nel determinante $G(\rho)$, e analogo significato abbia il simbolo Ω_{hk} con riferimento al determinante Ω. La ρ che figura nelle [30], è una funzione delle x^λ, per ora arbitraria. Poniamo:

$$[33]\begin{cases} K'_\varrho = G_{hk}[\partial_{k+2} G_{hk+1} - \partial_{k+1} G_{hk+2}]\ , \quad K''_\varrho = G^2_{hk}\Gamma_{hh} + G_{hk}G_{h+1k}\Gamma_{hh+1}\ , \\ K_\varrho = K'_\varrho + K''_\varrho\ , \\ I_1 = \omega_{hk}[\nabla_{k+2}\omega_{hk+1} - \nabla_{k+1}\omega_{hk+2}]\ , \quad I_2 = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\omega_{hk+1} - \nabla_{k+1}\omega_{hk+2}]\ , \\ I_3 = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\Omega_{hk+1} - \nabla_{k+1}\Omega_{hk+2}]\ . \end{cases}$$

In queste posizioni il simbolo ∇_k indica derivazione covariante intrinseca con riferimento alla terna di congruenze Λ, i parametri di derivazione essendo quindi i coefficienti di rotazione di essa, cioè le ρ_{hk}.

Vogliamo stabilire la seguente identità fondamentale (¹)

$$[W] \qquad K_{\varrho_i} = I_1\rho_i^2 + 2I_2\rho_i + I_3\ ,$$

ove ρ_i denota una qualunque radice dell'equazione $G(\rho)=0$, che è la [13] già considerata.

Cominciamo intanto a dimostrare l'identità

$$[W'] \qquad K'_\varrho = I'_1\rho^2 + 2I'_2\rho + I'_3\ ,$$

valevole per ogni funzione ρ delle x^λ, e dove è

$$[34]\begin{cases} I'_1 = \omega_{hk}\psi_{hk}\ , \quad I'_2 = \Omega_{hk}\psi_{hk}\ , \quad I'_3 = \Omega_{hk}\Psi_{hk}\ , \\ \psi_{hk} = \partial_{k+2}\omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\omega_{hk+2}\ , \quad \Psi_{hk} = \partial_{k+2}\Omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\Omega_{hk+2}\ . \end{cases}$$

A tale scopo osserviamo che si ha

$$[35]\begin{cases} G_{hh} = \rho^2 - (\omega_{h+1h+1} + \omega_{h+2h+2})\rho + \Omega_{hh}\ , \\ G_{hh+1} = G_{h+1h} = \omega_{hh+1}\rho + \Omega_{hh+1} = \omega_{h+1h}\rho + \Omega_{h+1h}\ . \end{cases}$$

(¹) WEINGARTEN, *Zur Theorie der isostatischen Flächen*, [« Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 90, (1881)]. Nel caso dello spazio ordinario e in coordinate cartesiane la (W) si riduce all'identità stabilita in questa Memoria [§ 2]. Va osservato che qui si trova un errore di stampa, dovendo il secondo addendo del secondo membro essere preceduto dal segno +. L'errore è corretto nella Errata-corrige del Volume.

Nella espressione di K'_ϱ data dalle [33], sostituiamo le [35]: tenendo conto solo dei termini che contengono le derivate della ρ, abbiamo che tale somma parziale è

$$[\rho^2 - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\rho + \Omega_{hh}][\omega_{hh+1}\partial_{h+2}\rho - \omega_{hh+2}\partial_{h+1}\rho] +$$
$$+ [\omega_{hh+1}\rho + \Omega_{hh+1}][\omega_{hh+2}\partial_h\rho + (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\partial_{h+2}\rho - 2\rho\,\partial_{h+2}\rho] +$$
$$+ [\omega_{hh+2}\rho + \Omega_{hh+2}][2\rho\,\partial_{h+1}\rho - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\partial_{h+1}\rho - \omega_{hh+1}\partial_h\rho] .$$

Vogliamo ora determinare il coefficiente, in tale somma, della derivata $\partial_h\rho$: con ovvio scambi di indici si trova che tale coefficiente è

$$[\rho^2 - (\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})\rho + \Omega_{h+1\,h+1}]\,\omega_{h+1\,h+2} - [\rho^2 - (\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1})\rho + \Omega_{h+2\,h+2}]\,\omega_{h+2\,h+1} +$$
$$+ [\omega_{hh+1}\rho + \Omega_{hh+1}]\,\omega_{hh+2} + [\omega_{h+1\,h+2}\rho + \Omega_{h+1\,h+2}][\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2} - 2\rho] +$$
$$+ [\omega_{h+2\,h+1}\rho + \Omega_{h+2\,h+1}][2\rho - (\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1})] - [\omega_{h\,h+2}\rho + \Omega_{h\,h+2}]\,\omega_{h\,h+1} .$$

Eseguendo il calcolo, si riconosce che il coefficiente in discorso vale

$$\begin{aligned} &\omega_{h\,h+2}\Omega_{h\,h+1} + \omega_{h+1\,h+2}\Omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}\,\Omega_{h+2\,h+1} - \\ &- \omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+2} - \omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+1\,h+2} - \omega_{h+2\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} . \end{aligned} \tag{36}$$

La somma dei termini nella [36] preceduti dal segno + è nulla, perchè, con riferimento al determinante $\|\omega_{hk}\|$, essa è la somma dei prodotti degli elementi della colonna $h+2$-esima per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti della colonna $h+1$-esima. Per la stessa ragione è nulla la somma dei termini della [36] che sono preceduti dal segno $-$.

Concludiamo pertanto che i coefficienti delle derivate della funzione ρ che figurano nella [W′] sono identicamente nulli: quindi la esplicita espressione di K'_ϱ non contiene tali derivate: essa è perciò un polinomio nella ρ. Si riconosce ovviamente che in esso è nullo il coefficiente di ρ^3. Possiamo allora scrivere

$$K'_\varrho = A\rho^2 + B\rho + C , \tag{37}$$

qualunque sia ρ. Calcoliamo A, B, C. Intanto, la espressione di C è subito trovata, perchè dalla [37] si deduce che C è il valore di K'_ϱ per $\rho = 0$. Perciò, dalla prima delle [33] si trae

$$C = [K'_\varrho]_{\varrho=0} = \Omega_{hk}[\partial_{k+2}\,\Omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\,\Omega_{hk+2}] ,$$

cioè

[38] $$C = \Gamma'_3 \, .$$

Calcoliamo A; il coefficiente di ρ^2 si determina dalla K'_ϱ ove al posto delle G_{hk} si pongano le [35]: per tale coefficiente si ha l'espressione

$$A = \partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2} - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,(\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}) +$$
$$+ \big\}\partial_h\,\omega_{h\,h+2} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+2\,h+2}\big\{\,\omega_{h\,h+1} -$$
$$- \big\}\partial_h\,\omega_{h\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+2\,h+2}\big\{\,\omega_{h\,h+2} \, .$$

Nella sommatoria, rispetto ad h, di $\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2}$, i termini si elidono due a due; la somma rimanente si può scrivere così:

$$\omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}] + \omega_{h\,h+1}\,[\partial_h\,\omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\omega_{hh}] +$$
$$+ \omega_{h\,h+2}\,[\partial_{h+1}\,\omega_{hh} - \partial_h\,\omega_{h\,h+1}] \, .$$

In definitiva risulta

$$A = \omega_{hh}\,[\partial_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \, ,$$

cioè

[39] $$A = \Gamma'_1 \, .$$

Calcoliamo B: questo coefficiente di ρ nella espressione di K'_ϱ vale

$$\Omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}] - [\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}]\,[\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2}] +$$
$$+ [\partial_h\,\omega_{h\,h+2} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+2\,h+2}]\,\Omega_{h\,h+1} + [\partial_h\,\Omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\Omega_{hh}]\,\omega_{h\,h+1} -$$
$$- [\partial_h\,\omega_{h\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+2\,h+2}]\,\Omega_{h\,h+2} + [\partial_{h+1}\,\Omega_{hh} - \partial_h\,\Omega_{h\,h+1}]\,\omega_{h\,h+2} \, ,$$

cioè

[40] $$\Omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}] + \Omega_{h\,h+1}\,[\partial_h\,\omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\omega_{hh}] +$$
$$+ \Omega_{h\,h+2}\,[\partial_{h+1}\,\omega_{hh} - \partial_h\,\omega_{h\,h+1}] + \omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2}] +$$
$$+ \omega_{h\,h+1}\,[\partial_h\,\Omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\Omega_{hh}] + \omega_{h\,h+2}\,[\partial_{h+1}\,\Omega_{hh} - \partial_h\,\Omega_{h\,h+1}] \, .$$

Prendendo in considerazione il determinante $\|\omega_{hk}\|$, usufruendo della proprietà già richiamata per il calcolo del coefficiente C, con ovvie derivazioni delle identità in discorso, si riconosce che la sommatoria (rispetto ad h) applicata alle quarta, quinta e sesta espressione

che figura nella [40], è eguale alla sommatoria (rispetto ad h) riferita alla prima, seconda e terza espressione che figura nella medesima. Concludiamo pertanto che è

$$B = 2\,\Omega_{hk}[\partial_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \;,$$

cioè

[41] $$B = 2\,I'_2 \,.$$

L'identità [W'] è pertanto completamente verificata.

Eseguendo nella K''_ϱ delle [33] la sostituzione delle [35], ed effettuando il calcolo, si troverebbe per K''_ϱ un polinomio di quarto grado nella ρ; ma se, come supporremo d'ora in avanti, ρ indica una radice dell'equazione secolare $G(\rho)=0$, vedremo che questo polinomio si trasforma in uno di secondo grado in ρ.

Fissiamo un valore per h e consideriamo le somme

[42] $$G^{hh} = G^2_{h1} + G^2_{h2} + G^2_{h3} \,,$$

[43] $$G^{hh+1} = G_{h1}\,G_{h+1\,1} + G_{h2}\,G_{h+1\,2} + G_{h3}\,G_{h+1\,3} \,.$$

che figurano nel secondo membro della K''_ϱ. Cominciamo a trasformare la [42]. Ponendo al posto delle G_{hk} le loro espressioni [35], e sviluppando i quadrati, otteniamo

[44] $$\begin{aligned} G^{hh} = {} & \rho^4 - 2[\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^3 + [\omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} + (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})^2 + \\ & + 2\,\Omega_{h\,h}]\,\rho^2 + 2[\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1} + \omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+2} - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h\,h}]\,\rho + \\ & + \Omega^2_{hh} + \Omega^2_{h\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} \,. \end{aligned}$$

Indichi ora e nel seguito ρ una qualunque radice dell'equazione [13]: per tale valore è nullo il determinante $G(\rho)$ e quindi è nullo anche il suo aggiunto $\|G_{hk}\|$; sono perciò nulli, per un noto teorema, tutti i minori del second'ordine che si estraggono da questo; in particolare, sono nulli tutti i minori principali dell'aggiunto di ordine due: abbiamo pertanto le identità

$$G_{h\,h}\,G_{h+1\,h+1} = G^2_{h\,h+1} \;,$$

le quali dànno, surrogandovi le [35],

$$\rho^4 - [\omega_{h\,h} + \omega_{h+1\,h+1} + 2\,\omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^3 = [\omega^2_{h\,h+1} - (\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2})(\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}) - \Omega_{h\,h} - \Omega_{h+1\,h+1}]\,\rho^2 + [(\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h\,h} + (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+1\,h+1} + 2\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1}]\,\rho + \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+1\,h+1}\,.$$

Queste sono tre identità: fissato il valore h, associamo alla identità, (α), relativa a tale indice quella, (β), che corrisponde al valore $h+1$ dell'indice, e poi l'altra, che diremo (γ), che corrisponde al valore $h+2$ dell'indice: poi sommiamo (α) con (γ) e sottraghiamo (β). Si ottiene

$$[45] \quad \rho^4 - 2[\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^3 = [\omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} - \omega^2_{h+1\,h+2} - (\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2})(\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}) - (\omega_{h\,h} + \omega_{h+1\,h+1})(\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}) + (\omega_{h\,h} + \omega_{h+1\,h+1})(\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2}) - 2\,\Omega_{h\,h}]\,\rho^2 + [(\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h\,h} + (\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+1\,h+1} + (\omega_{h\,h} + \omega_{h+1\,h+1})\,\Omega_{h\,h} + (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+2\,h+2} - (\omega_{h\,h} + \omega_{h+1\,h+1})\,\Omega_{h+1\,h+1} - (\omega_{h\,h} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+2\,h+2} + 2(\omega_{h\,h+1} + \Omega_{h\,h+1} + \omega_{h\,h+2}\Omega_{h\,h+2} - \omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+2}]\,\rho + \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+1\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+2\,h+2} + \Omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} - \Omega^2_{h+1\,h+2}\,.$$

Sommando la [44] con la [45] si trae l'espressione definitiva

$$[46] \quad G^{hh} = [\omega^2_{hh} + \omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} + \Omega_{h\,h} - \Omega_{h+1\,h+1} - \Omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^2 + [4\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1} + 4\,\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+2} - 2\,\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+2} + (2\,\omega_{h\,h} - \omega_{h+1\,h+1} - \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{hh} + (\omega_{h+2\,h+2} - \omega_{hh})\,\Omega_{h+1\,h+1} + (\omega_{h+1\,h+1} - \omega_{hh})\,\Omega_{h+2\,h+2}]\,\rho + \Omega^2_{h\,h} + \Omega^2_{h\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} + \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+1\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+2\,h+2} + \Omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} - \Omega^2_{h+1\,h+2}\,,$$

che è un polinomio di secondo grado nella ρ, radice della equazione secolare [13].

Trasformiamo ora la somma [43]. Poichè, come dicemmo, sono nulli tutti i minori del secondo ordine del determinate aggiunto $\|G_{hk}\|$, possiamo scrivere

$$\frac{G_{h1}}{G_{h+1\,1}} = \frac{G_{h2}}{G_{h+1\,2}} = \frac{G_{h3}}{G_{h+1\,3}} \ ,$$

donde

[47] $$G^{h\,h+1} = G_{h\,h+1} [G_{11} + G_{22} + G_{33}] \ ,$$

dalle quali, sostituendo le [35], si ricava

[48] $$G^{h\,h+1} = 3\,\omega_{h\,h+1}\,\rho^3 + [3\,\Omega_{h\,h+1} - 2\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_1]\,\rho^2 + \\ + [\omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 - 2\,\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_1]\,\rho + \Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 \ ,$$

ove

$$\Omega_1 = \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} \ , \quad \Omega_2 = \Omega_{11} + \Omega_{22} + \Omega_{33} \ .$$

Ma essendo ρ radice dell'equazione [13], abbiamo

[49] $$\rho^3 = \Omega_1\,\rho^2 - \Omega_2\,\rho + \Omega \ , \quad \Omega = \|\omega_{hk}\| \ .$$

Ponendo nella [48] la [49] otteniamo l'espressione definitiva

[50] $$G^{h\,h+1} = [\omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + 3\,\Omega_{h\,h+1}]\,\rho^2 - 2\,[\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + \omega_{h\,h+1}\,\Omega_2]\,\rho + \\ + \Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 + 3\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega \ .$$

Infine, sostituendo nella K''_ϱ data dalle [33], con ρ radice dell'equazione [13], le [46] e [50], si trae

$$[W''] \qquad K''_\varrho = I''_1\,\rho^2 + 2\,I''_2\,\rho + I''_3 \ ,$$

ove

[51] $$I''_1 = \Gamma_{hh}\,[\omega^2_{hh} + \omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} + \Omega_{hh} - \Omega_{h+1\,h+1} - \Omega_{h+2\,h+2}] + \\ + \Gamma_{h\,h+1}\,[\omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + 3\,\Omega_{h\,h+1}] \ ,$$

$$[52] \qquad I_2'' = \frac{1}{2}\Gamma_{hh}\,[4\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1} + 4\,\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+2} - 2\,\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+2} +$$
$$+ (2\,\omega_{h\,h} - \omega_{h+1\,h+1} - \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h\,h} + (\omega_{h+2\,h+2} - \omega_{h\,h})\,\Omega_{h+1\,h+1} +$$
$$+ (\omega_{h+1\,h+1} - \omega_{h\,h})\,\Omega_{h+2\,h+2}] - \Gamma_{h\,h+1}\,[\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + \omega_{h\,h+1}\,\Omega_2] \ ,$$

$$[53] \qquad I_3'' = \Gamma_{hh}\,[\Omega^2_{hh} + \Omega^2_{h\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} + \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+1\,h+1} +$$
$$+ \Omega^2_{h\,h+2} - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+2\,h+2} + \Omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} - \Omega^2_{h+1\,h+2}] +$$
$$+ \Gamma_{h\,h+1}\,[\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 + 3\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega] \ .$$

Queste espressioni di I_1'', I_2', I_3'' possono subire una notevole trasformazione.

Le esplicite espressioni delle Ω_{hk} si traggono dalle [35] ponendovi $\rho = 0$: esse sono pertanto

$$[54] \qquad \begin{cases} \Omega_{h\,h} = \omega_{h+1\,h+1}\,\omega_{h+2\,h+2} - \omega^2_{h+1\,h+2} \ , \\ \Omega_{h\,h+1} = \Omega_{h+1\,h} = \omega_{h\,h+2}\,\omega_{h+1\,h+2} - \omega_{h\,h+1}\,\omega_{h+2\,h+2} \ . \end{cases}$$

Ponendole nella [51] e sostituendo nella medesima al posto delle $\Gamma_{h\,h}$, $\Gamma_{h\,h+1}$ le [27], [28], si trova

$$[51_1] \qquad I_1'' = \omega_{h\,k}[(\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2})\,\omega_{hk} - \rho_{k\,k+1}\,\omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2}\,\omega_{h\,k+2} +$$
$$+ \rho_{h+1\,k+2}\,\omega_{h+2\,k+1} - \rho_{h+1\,k+1}\,\omega_{h+2\,k+2} + \rho_{h+2\,k+1}\,\omega_{h+1\,k+2} - \rho_{h+2\,k+2}\,\omega_{h+1\,k+1}] \ .$$

Più laborioso è invece il calcolo per mettere I_2'' sotto la forma seguente:

$$[52_1] \qquad I_2'' = \Omega_{h\,k}[(\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2})\,\omega_{h\,k} - \rho_{k\,k+1}\,\omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2}\,\omega_{h\,k+2} +$$
$$+ \rho_{h+1\,k+2}\,\omega_{h+2\,k+1} - \rho_{h+1\,k+1}\,\omega_{h+2\,k+2} + \rho_{h+2\,k+1}\,\omega_{h+1\,k+2} - \rho_{h+2\,k+2}\,\omega_{h+1\,k+1}] \ .$$

A questo scopo osserviamo, che se facciamo la differenza fra i secondi membri delle [52] e [52_1], la differenza fra i termini che contengono a fattore $\Omega_{h\,h}$ vale

$$[55] \qquad \Omega_{h\,h}[(2\,\rho_{h\,h+1} + \rho_{h+1\,h})\,\omega_{h\,h+1} + (2\,\rho_{h\,h+2} + \rho_{h+2\,h})\,\omega_{h\,h+2}] \ ,$$

mentre quella fra i termini che contengono a fattore $\Omega_{h\,h+1}$ è

$$[56] \qquad \Omega_{h\,h+1}\left[(2\rho_{h+1\,h}+\rho_{h\,h+1})\,\omega_{h\,h}+(2\rho_{h\,h+1}+\rho_{h+1\,h})\,\omega_{h+1\,h+1}+\right.$$

$$\left.+(2\rho_{h\,h+2}+\rho_{h+2\,h})\,\omega_{h+1\,h+2}+(2\rho_{h+1\,h+2}+\rho_{h+2\,h+1})\,\omega_{h\,h+2}\right].$$

La differenza in discorso è eguale pertanto alla somma delle [55] e [56]: questa si può scrivere così:

$$[57] \qquad \rho_{h+1\,h}[(\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h}+\omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+1\,h}+\omega_{h+2\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h})+$$

$$+2(\omega_{h\,h}\,\Omega_{h\,h+1}+\omega_{h+1\,h}\,\Omega_{h+1\,h+1}+\omega_{h+2\,h}\,\Omega_{h+2\,h+1})]+$$

$$+\rho_{h+2\,h}[(\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h}+\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h}+\omega_{h+2\,h+2}\,\Omega_{h+2\,h})+$$

$$+2(\omega_{h\,h}\,\Omega_{h\,h+2}+\omega_{h+1\,h}\,\Omega_{h+1\,h+2}+\omega_{h+2\,h}\,\Omega_{h+2\,h+2})] \quad .$$

Ciascuna delle somme contenuta fra le parentesi rotonde è nulla, perchè somma di prodotti degli elementi di una riga del determinante $\|\omega_{hk}\|$ per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga. Il nostro asserto è quindi provato, essendo identicamente nulla la [57].

Quasi senza calcoli si verifica che l'espressione [53] di I_3'' si può dare la forma seguente:

$$[53_1] \quad I_3''=\Omega_{h\,k}[(\rho_{k+1\,k+1}+\rho_{k+2\,k+2})\,\Omega_{h\,k}-\rho_{k\,k+1}\,\Omega_{h\,k+1}-\rho_{k\,k+2}\,\Omega_{h\,k+2}+$$

$$+\rho_{h+1\,k+2}\,\Omega_{h+2\,k+1}-\rho_{h+1\,k+1}\,\Omega_{h+2\,k+2}+\rho_{h+2\,k+1}\,\Omega_{h+1\,k+2}-\rho_{h+2\,k+2}\,\Omega_{h+1\,k+1}] \;.$$

Infatti, ricordiamo dalla teoria dei determinanti, che denotando con Ω^*_{hk} il complemento algebrico dell'elemento Ω_{hk} nel determinante $\|\Omega_{hk}\|$, sussiste l'identità

$$\omega_{hk}\,\Omega=\Omega^*_{hk} \quad .$$

Con questa osservazione, il coefficiente di $\Gamma_{h\,h+1}$ nell'espressione [53] di I_3'' si può scrivere

$$\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2+3\,\Omega^*_{h\,h+1} \;.$$

Dopo di ciò, basta confrontare le espressioni di I_1'' e di I_3'' date dalle [51] e [53]: si scorge che si passa dalla prima alla seconda per materiale sostituzione degli elementi ω_{hk} e relativi complementi

algebrici Ω_{hk}, con gli elementi Ω_{hk} e relativi complementi algebrici Ω^*_{hk}. Perciò, per avere la trasformata di I''_3 data dalla [53], basterà sostituire nella [51$_1$] alle ω_{hk} rispettivamente le Ω_{hk}. Abbiamo così provato quanto avevamo asserito.

Ricordiamo ora che, prendendo in esame, per fissare le idee, le ω_{hk}, le loro derivate prime covarianti ∇_l, con referenza alla terna Λ, i parametri di derivazione essendo, naturalmente, i coefficienti di rotazione di RICCI γ_{hij}, sono date dalle formule

[58] $$\nabla_l \, \omega_{hk} = \partial_l \, \omega_{hk} + \gamma_{ihl} \, \omega_{ik} + \gamma_{ikl} \, \omega_{hi} \; .$$

Consideriamo la somma

$$I_1 = I'_1 + I''_1 \; .$$

Ponendo al posto delle I'_1, I''_1 le espressioni date dalle [39] e [51$_1$], si ha

[59] $$\begin{aligned} I_1 = \omega_{hk} [\partial_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1} \, \omega_{h\,k+2} + (\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2}) \, \omega_{hk} - \\ - \rho_{k\,k+1} \, \omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2} \, \omega_{h\,k+2} + \rho_{k+1\,k+2} \, \omega_{h+2\,k+1} - \\ - \rho_{k+1\,k+1} \, \omega_{h+2\,k+2} + \rho_{k+2\,k+1} \, \omega_{h+1\,k+2} - \rho_{k+2\,k+2} \, \omega_{h+1\,k+1}] \; . \end{aligned}$$

Dalle [58] si trae (si ricordi che $\gamma_{h\,hj} = 0$)

$$\begin{aligned} \nabla_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} = \partial_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} + \gamma_{h+1\,h\,k+2} \, \omega_{h+1\,k+1} + \gamma_{h+2\,h\,k+2} \, \omega_{h+2\,k+1} + \\ + \gamma_{k\,k+1\,k+2} \, \omega_{hk} + \gamma_{k+2\,k+1\,k+2} \, \omega_{h\,k+2} \; , \end{aligned}$$

ovvero, con la notazione a due indici per le γ_{hij} mediante la posizione [18],

[60] $$\begin{aligned} \nabla_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} = \partial_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} - \rho_{h+2\,k+2} \, \omega_{h+1\,k+1} + \rho_{h+1\,k+2} \, \omega_{h+2\,k+1} + \\ + \rho_{k+2\,k+2} \, \omega_{hk} - \rho_{k\,k+2} \, \omega_{h\,k+2} \; . \end{aligned}$$

Analogamente si trova

[61] $$\begin{aligned} \nabla_{k+1} \, \omega_{h\,k+2} = \partial_{k+1} \, \omega_{h\,k+2} - \rho_{h+2\,k+1} \, \omega_{h+1\,k+2} + \rho_{h+1\,k+1} \, \omega_{h+2\,k+2} - \\ - \rho_{k+1\,k+1} \, \omega_{hk} + \rho_{k\,k+1} \, \omega_{h\,k+1} \; . \end{aligned}$$

Sottraendo la [61] dalla [60], si ottiene il coefficiente ω_{hk} nella [59]. Abbiamo pertanto la formula definitiva

$$[62] \qquad I_1 = \omega_{hk}[\nabla_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \,.$$

In modo analogo si ottiene

$$[63] \qquad I_2 = I_2' + I_2'' = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \,,$$

$$[64] \qquad I_3 = I_3' + I_3'' = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\,\Omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\,\Omega_{h\,k+2}] \,.$$

L'identità [W] è pertanto completamente dimostrata.

§ III. – Condizioni necessarie e sufficienti affinchè la varietà V_3 sia normale

Ricordiamo l'ipotesi fatta che la varietà V_3 abbia distinte le sue tre curvature principali ρ_i, cioè, si supponga che le tre radici ρ_i dell'equazione [13] siano distinte. Consideriamo le identità [12_1] nelle quali abbiamo fissato un valore i per l'indice h: poichè la radice ρ_i è semplice, la caratteristica della matrice $\|\omega_{hk} - \delta_{hk}\rho_i\|$ è due; inoltre i complementi algebrici degli elementi d'una sua riga sono proporzionali a quelli degli elementi di ogni altra sua riga. Possiamo pertanto scrivere

$$[65] \qquad m_h^{(i)}\,\beta_{ik} = G_{hk}^{(i)} \,,$$

ove $m_h^{(i)}$ è scelta in modo che risulti

$$\beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 + \beta_{i3}^2 = 1 \,.$$

Costruiamo la funzione

$$[66] \qquad H_{\varrho_i} = m_h^{(i)}\,\beta_{ik}[\partial_{k+2}\,m_h^{(i)}\,\beta_{ik+1} - \partial_{k+1}\,m_h^{(i)}\,\beta_{ik+2}] + \\ + [\Gamma_{kk}\,\beta_{ik}^2 + \Gamma_{k\,k+1}\,\beta_{ik}\,\beta_{ik+1}]\,m_h^{(i)2} \,.$$

Si ha ovviamente

$$H_{\varrho_i} = \{ \beta_{ik} [\partial_{k+2} \beta_{ik+1} - \partial_{k+1} \beta_{ik+2}] + [\Gamma_{kk} \beta_{ik}^2 + \Gamma_{kk+1} \beta_{ik} \beta_{ik+1}] \} m_h^{(i)2} ,$$

Cioè, in virtù delle [23],

$$[67] \qquad H_{\varrho_i} = M r'_i , \quad M = \Sigma_h m_h^{(i)2} \neq 0 .$$

Sostituendo le [65] nella [66] ricaviamo, tenendo conto della simmetria del determinante $\|G_{hk}^{(i)}\|$,

$$H_{\varrho_i} = G_{hk}^{(i)} [\partial_{k+2} G_{h\,k+1}^{(i)} - \partial_{k+1} G_{h\,k+2}^{(i)}] + \Gamma_{kk} G_{kh}^{(i)2} + \Gamma_{kk+1} G_{kh}^{(i)} G_{k+1\,h}^{(i)} ,$$

e quindi, per la identità [W],

$$[68] \qquad H_{\varrho_i} = K_{\varrho_i} = I_1 \rho_i^2 + 2 I_2 \rho_i + I_3 .$$

Supponiamo dapprima che le congruenze principali della V_3 siano normali: allora in ogni punto della varietà sono nulli gli invarianti r'_i dati dalle [23], e perciò, in forza della [67] sono ivi nulle le tre funzioni H_{ϱ_i}; in virtù della [68] in ogni punto di V_3 sono allora valide le tre identità

$$I_1 \rho_i^2 + 2 I_2 \rho_i + I_3 = 0 .$$

Questo significa che l'equazione di secondo grado in ρ

$$I_1 \rho^2 + 2 I_2 \rho + I_3 = 0$$

ammette tre radici distinte, che sono le ρ_i. Deve quindi aversi in ogni punto di V_3,

$$I_1 = 0 , \qquad I_2 = 0 , \qquad I_3 = 0 ,$$

cioè

$$[70] \qquad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= \omega_{hk} [\nabla_{k+2} \omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1} \omega_{h\,k+2}] = 0 , \\ I_2 &= \Omega_{hk} [\nabla_{k+2} \omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1} \omega_{h\,k+2}] = 0 , \\ I_3 &= \Omega_{hk} (\nabla_{k+2} \Omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1} \Omega_{h\,k+2}] = 0 . \end{aligned} \right.$$

Inversamente, se queste identità [70] sono valide in ogni punto della varietà V_3, allora risultano nulle ivi le K_{ϱ_i}, cioè le H_{ϱ_i}, e infine in forza delle [67], le r'_i; le congruenze principali di V_3 sono quindi normali.

Pertanto, le identità [70] sono necessarie e sufficienti perchè la varietà V_3 a tre dimensioni sia normale nel senso del BIANCHI.

Osservazione. – Vogliamo esplicitamente rilevare che nelle relazioni [70] figurano solo elementi geometrici connessi con la varietà V_3. E infatti, noi abbiamo definiti gli invarianti ω_{hk} a mezzo delle posizioni [11] nelle quali intervengono le componenti del tensore doppio covariante di RICCI, ma, come è noto, per queste funzioni si hanno anche le espressioni

$$\omega_{hk} = \partial_{k+2}\, \rho_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\, \rho_{h\,k+2} + \sigma \rho_{hk} - P_{hk} - \rho_{hj}\, \rho_{kj} \ , \qquad \sigma = \Sigma_j\, \rho_{jj} \ ,$$

ove P_{hk} è il complemento algebrico dell'elemento ρ_{hk} nel determinante $\|\rho_{hk}\|$. Inoltre, le derivate covarianti ∇_j si riferiscono alle linee della congruenza Λ, i parametri di derivazione essendo i coefficienti di rotazione ρ_{hk} relativi a questa terna.

§ IV. – TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$.

Le equazioni [70] possono essere sottoposte ad una trasformazione atta a cambiarle in altre tre nelle quali figurano solo le componenti del tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$ e loro derivate ordinarie rispetto alle variabili x^λ fino a quelle del terz'ordine incluso.

D'ora in avanti denoteremo con il simbolo ∇_σ derivazione covariante con riferimento alla forma [1]: se ricordiamo che per un generico scalare delle variabili x^λ la derivazione parziale ordinaria rispetto alla x^μ si identifica con la ∇_μ della stessa funzione, abbiamo

[71] $$\partial_l = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{d x^\mu}{d \sigma_l} = \underset{l}{\lambda}{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \underset{l}{\lambda}{}^\mu \nabla_\mu \ .$$

Indichiamo con e_{ijl} le componenti intrinseche rispetto alla terna Λ del tensore ternario ε di RICCI, cioè poniamo

[72] $$e_{ijl} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\, \underset{i}{\lambda}{}_\alpha\, \underset{j}{\lambda}{}_\beta\, \underset{l}{\lambda}{}_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \underset{i}{\lambda}{}^\alpha\, \underset{j}{\lambda}{}^\beta\, \underset{l}{\lambda}{}^\gamma \ ,$$

donde

$$[73] \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = e_{ijl} \underset{i}{\lambda^{\alpha}} \underset{j}{\lambda^{\beta}} \underset{l}{\lambda^{\gamma}} \,, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = e_{ijl} \underset{i}{\lambda_{\alpha}} \underset{j}{\lambda_{\beta}} \underset{l}{\lambda_{\gamma}} \,.$$

Per la definizione del tensore ternario ε, e per le proprietà dei determinanti dei parametri $\underset{h}{\lambda^{\mu}}$ e dei momenti $\underset{h}{\lambda^{\mu}}$, risulta che le e_{ijl} hanno per valore zero, se almeno due degli indici i, j, l sono eguali fra loro, e valgono invece $+1$, oppure -1, secondo che la permutazione ijl a indici tutti diversi, è di classe pari o dispari rispetto alla permutazione 1 2 3.

Ricordiamo intanto le posizioni [11]

$$[74] \qquad \alpha_{\mu\nu} = \omega_{hk} \underset{h}{\lambda_{\mu}} \underset{k}{\lambda_{\nu}} \,,$$

dalle quali si traggono le equivalenti

$$[75] \qquad \omega_{hk} = \alpha_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda^{\mu}} \underset{k}{\lambda^{\nu}} \,.$$

Consideriamo il tensore doppio contravariante simmetrico le cui componenti $\Phi^{\mu\nu}$ sono definite dalle posizioni

$$[76] \qquad \Phi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\beta\mu} \varepsilon^{\varrho\tau\nu} \alpha_{\sigma\varrho} \alpha_{\beta\tau} \,.$$

Per le proprietà del tensore ternario ε, ogni componente $\Phi^{\mu\nu}$ è eguale al complemento algebrico dell'elemento $\alpha_{\mu\nu}$ del determinante $\|\alpha_{\mu\nu}\|$ diviso per il discriminante della forma [1]. Poniamo al posto delle $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ e delle $\alpha_{\mu\nu}$ le loro espressioni [73] e [74]; ove si osservi che si può scrivere

$$\Omega_{hk} = \frac{1}{2} e_{irh} e_{jsk} \omega_{ij} \omega_{rs} \,,$$

si riconosce, usufruendo delle [8], che si ha

$$[77] \qquad \Phi^{\mu\nu} = \Omega_{hk} \underset{h}{\lambda^{\mu}} \underset{k}{\lambda^{\nu}} \,,$$

dalle quali si traggono le equivalenti

$$[78] \qquad \Omega_{hk} = \Phi^{\mu\nu} \underset{h}{\lambda_{\mu}} \underset{k}{\lambda_{\nu}} \,.$$

Tutto questo premesso, prendiamo in esame la [39]

$$\mathrm{I}'_1 = \omega_{hk}[\partial_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}]\,;$$

a questa possiamo dare le forme seguenti

$$\mathrm{I}'_1 = e_{kql}\;\omega_{hk}\;\nabla_l\,\omega_{hq} = e_{kql}\;\omega_{hk}\;\underset{l}{\lambda}^{\sigma}\,\nabla_\sigma\,\omega_{hq}\;.$$

Sostituiamo al posto delle e_{kql} e delle ω_{hk} che sono fuori del simbolo ∇_σ le loro espressioni [72], [75]; teniamo conto delle [8] e inoltre che

$$\underset{h}{\lambda}_\mu = a^{\mu\tau}\,\underset{h}{\lambda}_\tau\;.$$

Otteniamo così la formula definitiva, scambiando q in j,

[79] $$\mathrm{I}'_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma}\;a^{\mu\tau}\,\alpha_{\mu\nu}\,\underset{j}{\lambda}_\beta\,\underset{h}{\lambda}_\tau\,\nabla_\sigma\,\omega_{hj}\;.$$

Per trasformare la $[51_1]$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}''_1 = \omega_{hk}\,[(\rho_{k+1\;k+1} + \rho_{k+2\;k+2})\,\omega_{hk} - \rho_{k\,k+1}\,\omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2}\,\omega_{h\,k+2} +\\ + \rho_{h+1\;k+2}\,\omega_{h+2\;k+1} - \rho_{h+1\;k+1}\,\omega_{h+2\;k+2} +\\ + \rho_{h+2\;k+1}\,\omega_{h+1\;k+2} - \rho_{h+2\;k+2}\,\omega_{h+1\;k+1}]\;,\end{aligned}$$

conviene far uso della notazione a tre indici γ_{hkl} per indicare i coefficienti di rotazione ρ_{hk} della terna Λ. Si può allora scrivere

$$\mathrm{I}''_1 = \omega_{hj}\,[(\gamma_{kj+1\;j+2} - \gamma_{kj+2\;j+1})\,\omega_{hk} + \gamma_{h\,kj+1}\,\omega_{kj+2} - \gamma_{h\,kj+2}\,\omega_{kj+1}]\;,$$

od anche

$$\mathrm{I}''_1 = \omega_{hj}[e_{qrs}\,\gamma_{jrs}\,\omega_{hq} + e_{qjs}\,\gamma_{hrs}\,\omega_{rq}]\;.$$

Sostituiamo al posto delle γ_{hkl}, delle e_{hkl} e delle ω_{hk} che sono dentro le parentesi quadre le loro espressioni [15], [72], [75]; in forza delle [8] e delle

$$a^{\mu\tau} = \underset{h}{\lambda}^{\mu}\,\underset{h}{\lambda}^{\nu}\;,$$

si ha

$$\mathrm{I}''_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma}\,\omega_{hj}\,\alpha_{\mu\nu}\,[\underset{h}{\lambda}^{\mu}\,\nabla_\sigma\,\underset{j}{\lambda}_\beta + \underset{j}{\lambda}_\beta\,a^{\mu\tau}\,\nabla_\sigma\,\underset{h}{\lambda}_\tau]\;.$$

Infine, poichè

$$\underset{h}{\lambda}^{\mu} = a^{\mu\tau} \underset{h}{\lambda}_{\tau} ,$$

si trae l'espressione definitiva

[80] $$I_1'' = \varepsilon^{\nu\beta\sigma} a^{\mu\tau} \alpha_{\mu\nu} [\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_{\beta} + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_{\beta} \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_{\tau}] .$$

Sommando la [79] e [80], otteniamo

$$I_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma} a^{\mu\tau} \alpha_{\mu\nu} [\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_{\beta} + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_{\beta} \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_{\tau} + \underset{j}{\lambda}_{\beta} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \nabla_\sigma \omega_{hj}] .$$

La somma fra parentesi, in virtù della [74], è la derivata covariante ∇_σ con riferimento alla [1] del tensore $\alpha_{\tau\beta}$ di Ricci. Abbiamo pertanto la trasformata della I_1 nella forma

[70$_1$] $$I_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma} a^{\mu\tau} \alpha_{\mu\nu} \nabla_\sigma \alpha_{\tau\beta} .$$

Trasformiamo ora l'espressione della I'_2 data dalla [41]

$$I'_2 = \Omega_{hk} [\partial_{k+2}\, \omega_{h\, k+1} - \partial_{k+1}\, \omega_{h\, k+2}] .$$

In conformità a quanto vedemmo per la I'_1, si ha

$$I'_2 = e_{kql}\, \Omega_{hk}\, \underset{l}{\lambda}^{\sigma} \nabla_\sigma \omega_{hq} .$$

Sostituendo al posto delle e_{kql} e delle Ω_{hk} le loro espressioni [72], [78], tenendo conto delle [8], e ricordando che

$$a_{\mu\nu} = \underset{h}{\lambda}_{\mu} \underset{h}{\lambda}_{\nu} ,$$

si trova, scambiamando q in j,

$$I'_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \underset{j}{\lambda}_{\varrho} \underset{h}{\lambda}_{\mu} \Phi^{\mu\nu} \nabla_\sigma \omega_{hj} .$$

L'espressione [52$_1$] di I''_2

$$I''_2 = \Omega_{hk} [(\rho_{k+1\, k+1} + \rho_{k+2\, k+2})\, \omega_{hk} - \rho_{k\, k+1}\, \omega_{h\, k+1} - \rho_{k\, k+2}\, \omega_{h\, k+2} +$$
$$+ \rho_{h+1\, k+2}\, \omega_{h+2\, k+1} - \rho_{h+1\, k+1}\, \omega_{h+2\, k+2} +$$
$$+ \rho_{h+2\, k+1}\, \omega_{h+1\, k+2} - \rho_{h+2\, k+2}\, \omega_{h+1\, k+1}] ,$$

con riferimento alla parte contenuta fra le parentesi quadre, è quella stessa di I'_1 (formula [51_1]): si può quindi scrivere

$$I''_2 = \Omega_{hj} [e_{qrs} \gamma_{jrs} \omega_{hq} + e_{qjs} \gamma_{hrs} \omega_{rq}] ,$$

la quale espressione è identica alla seguente:

[82] $$I''_2 = \omega_{hj} [e_{jrs} \gamma_{qrs} \Omega_{hq} + e_{jqs} \gamma_{rhs} \Omega_{rq}] .$$

Sostituendo alle γ_{hkl}, e_{hkl}, Ω_{hk} le loro espressioni [15], [72], [75], si ottiene, in virtù delle [8] e delle identità

$$a_{\mu\nu} = \underset{h}{\lambda}_\mu \underset{h}{\lambda}_\nu , \quad \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\nu + \underset{h}{\lambda}_\nu \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\mu = 0 ,$$

[83] $$I''_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \Phi^{\mu\nu} [\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_\varrho + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_\varrho \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\mu] .$$

Infine, sommando le [81], [83], si trae

[84] $$I_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \Phi^{\mu\nu} [\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_\varrho + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_\varrho \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\mu + \underset{j}{\lambda}_\varrho \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \omega_{hj}] .$$

Con riferimento alla [75], con ovvio scambio di indici, si vede che la somma fra parentesi quadre nella [84] si identifica con

$$\nabla_\sigma \alpha_{\mu\varrho} .$$

Arriviamo così alla trasformata definitiva della I_2

[70_2] $$I_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \Phi^{\mu\nu} \nabla_\sigma \alpha_{\mu\varrho} .$$

Trasformiamo infine l'espressione della I'_3 data dalla [38]

$$I'_3 = \Omega_{hk} [\partial_{k+2} \Omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1} \Omega_{h\,k+2}] .$$

Si ha, in conformità ai calcoli precedenti,

[85] $$I'_3 = \Omega_{hk} [\partial_{k+2} \Omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1} \Omega_{h\,k+2}] = e_{kql} \Omega_{hk} \underset{l}{\lambda}^\sigma \nabla_\sigma \Omega_{hq} =$$
$$= e_{kql} \Omega_{hk} \underset{l}{\lambda}_\sigma \nabla^\sigma \Omega_{hq} = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma} a_{\tau\mu} \Phi^{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}^\tau \underset{j}{\lambda}^\varrho \nabla^\sigma \Omega_{hj} .$$

All'espressione di I''_3 data dalla [53$_1$] possiamo dare la forma seguente:

$$I''_3 = \Omega_{hj}\,[e_{qrs}\,\gamma_{jrs}\,\Omega_{hq} + e_{qjs}\,\gamma_{hrs}\,\Omega_{rq}] \ .$$

Ponendo al posto delle γ_{hkl}, e_{hkl}, Ω_{hk} le espressioni date dalle [15], [72], [75], si ottiene, in virtù delle [8],

$$[86] \qquad I''_3 = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu}\, [\Omega_{hj} \underset{h}{\lambda^\tau} \nabla^\sigma \underset{j}{\lambda^\varrho} + \Omega_{hj} \underset{j}{\lambda^\varrho} \nabla^{\sigma\tau} \underset{h}{\lambda^\tau}] \ .$$

Sommando le [85], [86] si trae

$$[87] \quad I_3 = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu}\, [\Omega_{hj} \underset{h}{\lambda^\tau} \nabla^\sigma \underset{j}{\lambda^\varrho} + \Omega_{hj} \underset{j}{\lambda^\varrho} \nabla^\sigma \underset{h}{\lambda^\tau} + \underset{h}{\lambda^\tau} \underset{j}{\lambda^\varrho} \nabla^\sigma \Omega_{hj}] \ .$$

Se infine si osserva che la somma fra le parentesi quadre nella [87] è la derivata contravariante di $\Phi^{\tau\varrho}$ ottenuta dalla [77], si arriva alla trasformata definitiva di I_3

$$[70_3] \qquad I_3 = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu} \nabla^\sigma \Phi^{\tau\varrho} \ .$$

Osservazione. - Le equazioni

$$[88] \qquad \begin{cases} I_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma}\, a^{\mu\tau}\, \alpha_{\mu\nu} \nabla_\sigma \alpha_{\tau\beta} = 0 \ , \\ I_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma}\, a_{\alpha\nu}\, \Phi^{\mu\nu} \nabla_\sigma \alpha_{\mu\varrho} = 0 \ , \\ I_3 = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu} \nabla^\sigma \Phi^{\tau\varrho} = 0 \ , \end{cases}$$

sono necessarie e sufficienti affinchè la varietà riemanniana V_3 sia normale nel senso del Bianchi: avuto riguardo alle espressione [76] delle componenti $\Phi^{\mu\nu}$, nei primi membri delle [88] figurano le componenti del tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$ della varietà, quelle del tensore doppio simmetrico covariante $\alpha_{\mu\nu}$ di Ricci e le derivate prime di quest'ultime componenti rispetto al ds^2 di V_3. Pertanto, le equazioni soprascritte contengono soltanto i coefficienti $a_{\mu\nu}$ della forma [1] che definisce la varietà riemanniana e loro derivate parziali ordinarie fino a quelle del terz'ordine incluso.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 4
pag. 55-62

ASTRONOMICAL APPRECIATION OF THE GREGORIAN CALENDAR (*)

(With two figures)

J. DE KORT S. J.

SVMMARIVM. — Gregoriana calendarii restitutio id constanter enitebatur, ut servatis maiorum traditionibus de statuendae paschatis sollemnitatis ratione veros motus solis lunaeque presse adsequeretur. Quam vero id bene effectum sit e recentibus antiquisque lunae et solis observationibus atque ex theoria motus telluris collata CLAVII explanatione patefit.

INTRODUCTION

The change in the calendar effected in 1582 by Pope GREGORY XIII has been called by its originators a restitution of the calendar rather than a correction (1). As a matter of fact, the Gregorian Calendar not only introduced a scientific improvement at a moment when improvement appeared imperative, but at the same time it also preserved the essentials of older conceptions. In this way was erected a monu-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Soprannumerario Revmo P. Johan Stein S. J. il 23 agosto 1949.

(1) Compendium..... ad principes Christianos, 1577; GREGORY XIII, Bull « Inter gravissimas », 1582.

These documents are given by Father CHRISTOPHER CLAVIUS S. J., the semi-official spokesman of the calendar reform, in his book: *Romani Calendarii a Gregorio XIII P. M. restituti Explicatio*. Romae apud Aloysium Zannettum, 1603. The book was reprinted in Clavius' *Opera Omnia*. Notwithstanding its considerable length, it is a readable book even now. I shall cite it by the name of its author.

ment of science as well as of human culture and religious piety, indeed a monument of wisdom in the truest sense of the word. In the present paper, however, we confine our attention to the scientific aspects of the calendar, recognizing of course that the broad wisdom of the authors impregnated even their scientific judgement.

FUNDAMENTALS OF GREGORIAN REFORM

Nowadays most people think that the Gregorian change in the calendar consisted in the suppression of ten days in October 1582 and the dropping, from then on, of three leap-days every four hundred years. Such was not, however, the idea of the originators of the calendar reform. The problem to be solved was a much more complicated one. Connected with the solar calendar by means of the Golden Number, there was the lunar calendar, which had gone slow by about four days and which, like the solar calendar, needed a small constant correction for the future. Every correction of the solar calendar, it was feared, would hopelessly upset the lunar calendar, which was reasonably good only for the existing year of 365,25 days. On the other hand, it seemed undesirable to introduce a wholly new and unknown system into an institution as venerable as the calendar.

It was then that the physician Luigi Gigli proposed to reshape the old epacts into a new system of epacts which could be shifted backward and forward as need should arise. The shifts in one direction, called solar corrections, would insert one day each time into the lunar calendar. They were to take place at the beginning of every year in which a leap-day was to be suppressed in the solar calendar. By the lunar corrections the epacts were to be shifted in the other direction 8 times every 2500 years, each time leaving out one day, to provide a correction of the existing lunar calendar. Gigli called his system a *calendarium perpetuum*, not because he believed that his periods of the sun and moon would never in the future be superseded by better values, but because the correction system devised by him was to be a perfectly flexible tool in the hands of future calendar reformers, since the solar and lunar calendar could henceforth be corrected without mutual interference. It is true that the compensation of the change

in the solar calendar by the shift in the epacts is not mathematically perfect. Indeed, for every day dropped from the solar calendar not exactly a day but rather a thirthieth part of a calendar month, viz. about 0,984 days, is reinserted into the lunar calendar. The difference of 0,016 days, however, amounts to a twentieth part of a day only after four hundred years and moreover it can be properly taken care of in the lunar corrections themselves. Any risk that the solar corrections would render the lunar calendar intractable is certainly eliminated.

The actual length of the Gregorian year was based on the value 365,24255 days, which had been adopted in the Alphonsine Tables; the length of the month was taken from Copernicus' data as used in the Prutenian Tables. These were what the correctors considered as the most reliable observational values, with the exclusion of periodic changes in the lengths of year and month. The corrections to be applied to the Julian Calendar were rounded off to well-manageable values, viz., the correction of 3/400 days per year for the sun was introduced instead of 0,00745 days, and in the case of the moon 8/2500 days per year was substituted for 0,0031840 days. Clavius states that the rounding-off errors in the calendars for sun and moon will amount to one day by the years A. D. 28400 and 8100, respectively, if the observational values still prove accurate, but he entrusts any further adjustment to the judgement of future correctors of the calendar.

CORRECTNESS OF GREGORIAN YEAR

Comparison of the Gregorian solar calendar with modern astronomical observations is usually made by stating the difference between the calendar and the tropical motion of the mean sun. This is perhaps the most obvious standard by which to judge a calendar constructed according to our current ideas. Such a calendar should be equally accurate, if possible, for every season of the year. From the historical point of view, however, we should first realize which astronomical quantities the Gregorian Calendar intended to reproduce. Clavius states explicitly (Chapter VI, section 8 and elsewhere) that the true sun's transit of the vernal point, not the mean sun's, has to be considered as the fiducial point in measuring the length of the year.

One should keep in mind that the Gregorian Calendar was meant to be an ecclesiastical calendar primarily and only secondarily a civil calendar, and so attention was given mostly to a correct representation of the vernal equinox.

It is apparent, then, that the time interval between two transits of the true sun [1] over the vernal equinox is now longer than the interval between two transits of the mean sun, because the transit actually takes place in that part of the orbit where the true sun moves faster than the mean sun, and since at the same time the sun's perigee advances relative to the equinox. The table below gives a few numerical values corresponding to the slopes in figure 1. The figure is based on the elements of the sun's motion as adopted by Clemence [2], except for his introduction of Newtonian instead of Universal Time. These elements represent modern and old observations of the sun and the moon, supplemented by theoretical relations between the motions in the solar system.

Tropical Year Expressed in Mean Solar Days

	FOR MEAN SUN	FOR TRUE SUN
1 B. C.	365,2424	365,2422
2000 A. D.	365,2422	365,2423
4000 A. D.	365,2419	365,2423

It is seen that, although the period of the sun's mean motion is gradually decreasing, the effect on the vernal-transit period of the true sun is nearly compensated for by the correction arising from the equation of the center, so that the length of the true sun's vernal

(1) The term « true sun » is here used for the sun as affected by its mean motion and the equation of the center only.

(2) G. M. Clemence, *On the system of astronomical constants*. Astr. Journ., 53, 169, 1948.

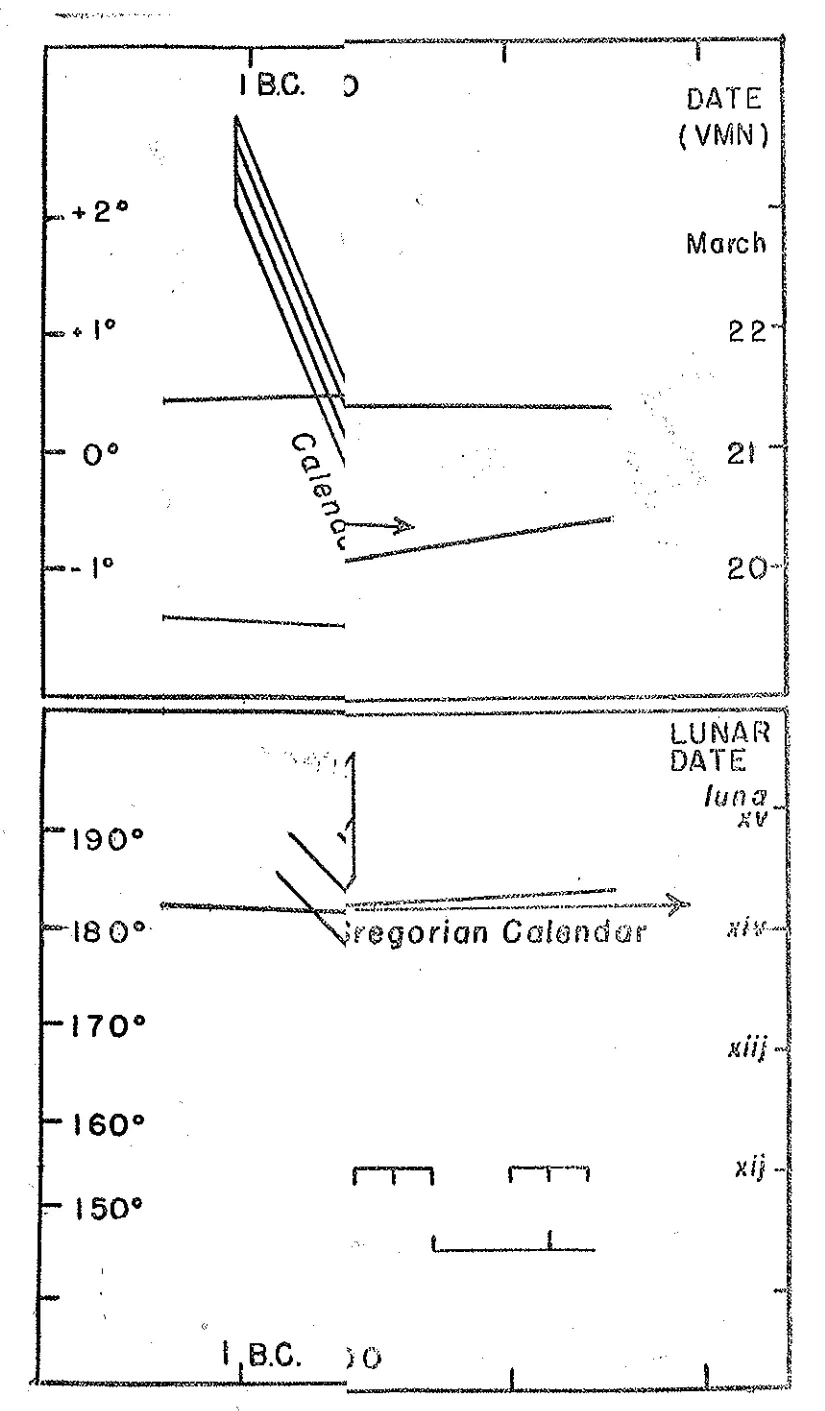


FIGURE I. Venetian mean noon.

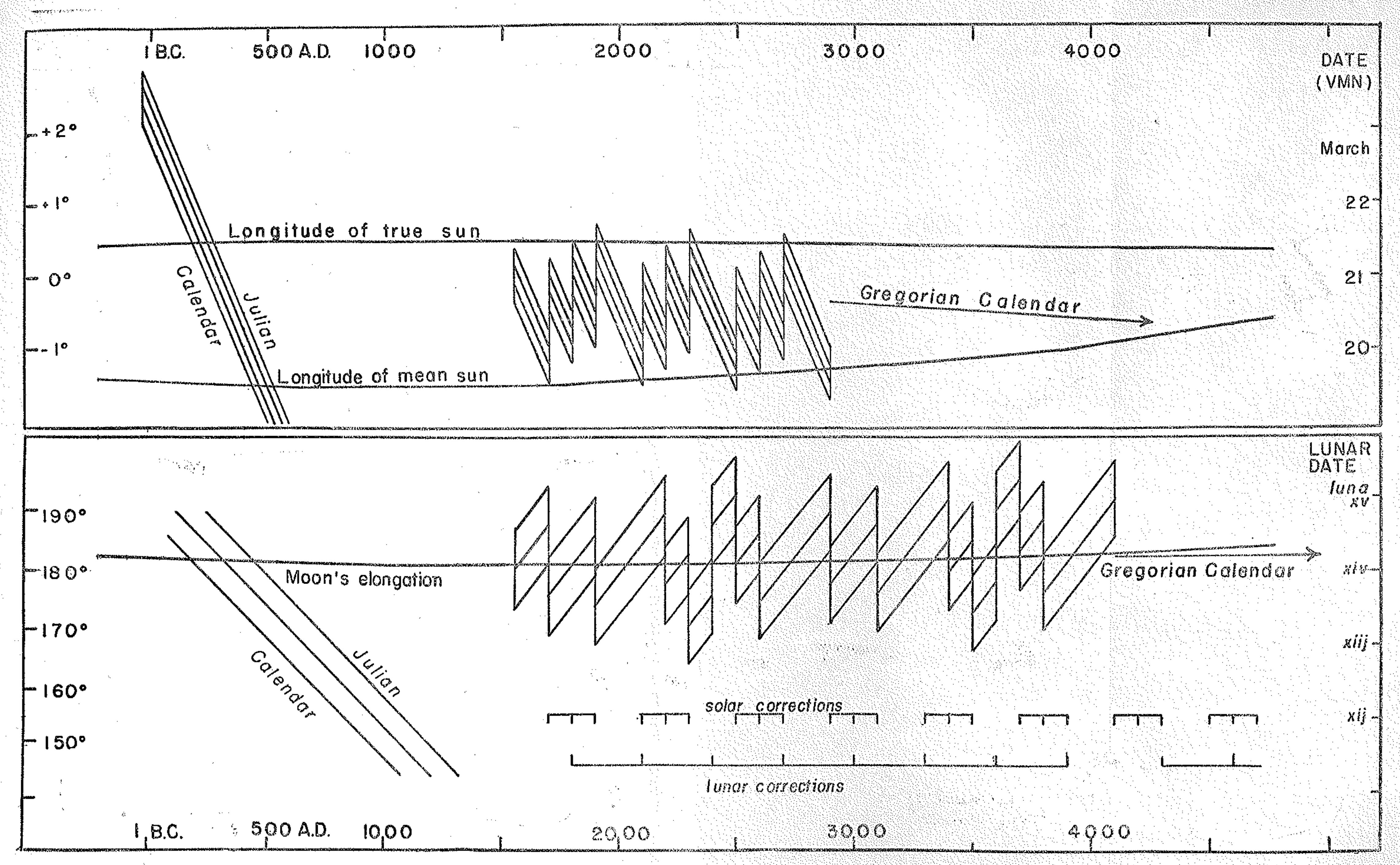


FIGURE 1. Sun's motion compared with Calendars. — FIGURE 2. Moon's motion compared with Calendars. — Dates in both figures refer to Venetian mean noon.

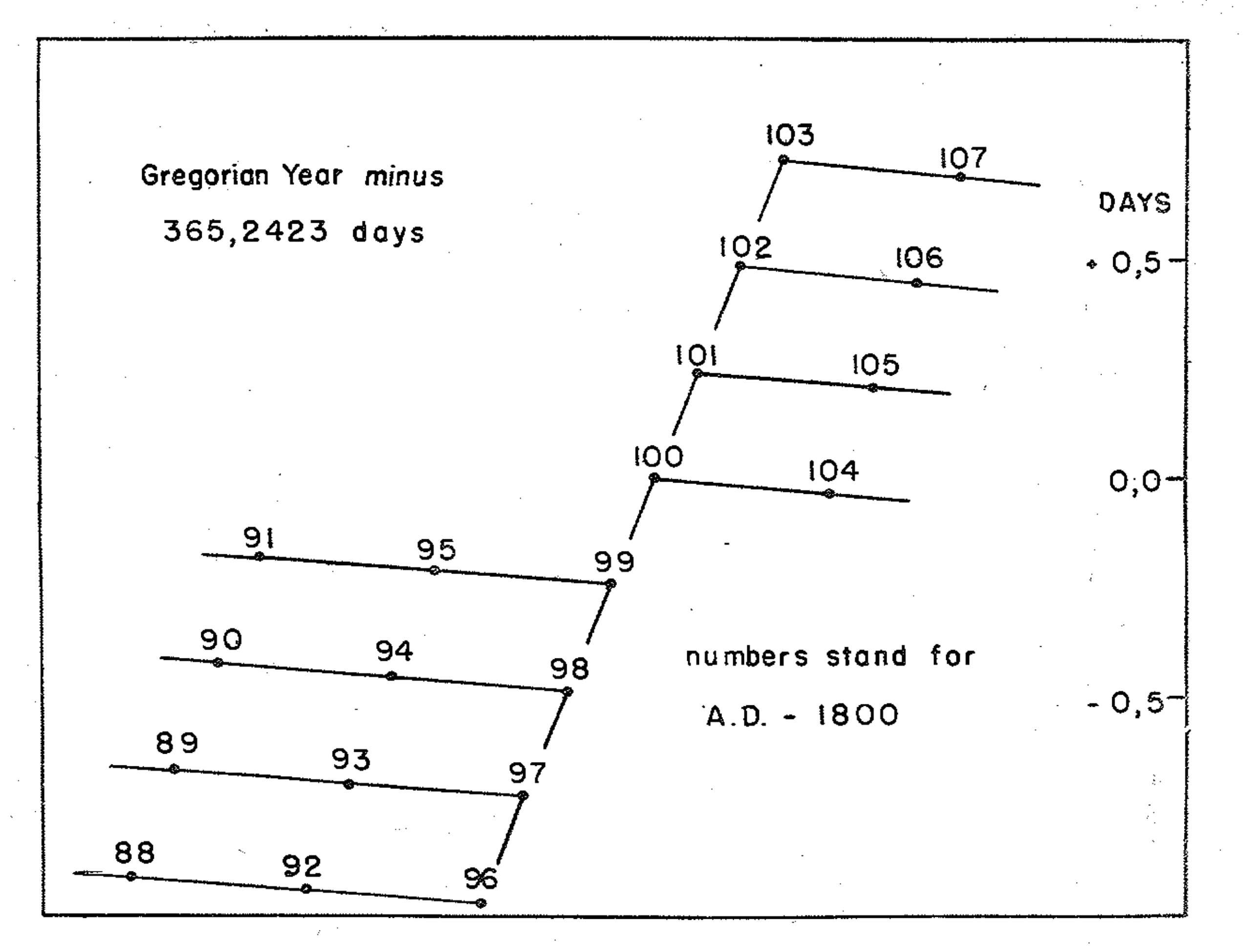


FIGURE 1*a*. – Part of Fig. 1 enlarged.

year is practically unchanged. I am not sure that astronomers in CLAVIUS' time were aware of this difference between the lengths of the two years, though the motion of the perigee was well known to COPERNICUS (1). Perhaps the accidental constancy of the true sun's vernal year distracted the astronomers from this difference. The difference in time between the two transits, amounting to nearly two days, is explicitly mentioned by CLAVIUS. He gives much attention to the precessional motion of the equinox which according to COPERNICUS (2) comprises not only a continuous motion but also a periodic shift with a semi-amplitude of about one degree and a period of 1717 years, resulting in corresponding changes in the length of the year. CLAVIUS does not deny COPERNICUS' statement, rather he seems to admit its truth; but in his opinion the calendar should not follow these periodic changes but should simply adopt an average length of the year, a decision which would nowadays seem obviously correct. CLAVIUS' reasons are mostly of a cultural or religious character, although he adds that in the present case, since some astronomers still doubt the reality of COPERNICUS' periodic term, its inclusion would be even less appropriate. The periodicity is inexistent, as we now know, so CLAVIUS' reserve was at the same time sound scientific criticism.

In Figure 1 the longitude of true sun and mean sun are compared with a cycle of artificial years of 365,423 solar days. The cycle is counted backward and forward from 1900 March 21, Venetian mean noon, Venice being the meridian of reference and noon the zero of hour in the Gregorian Calendar. Ordinates for true sun and mean sun are degrees of longitude, and are shown at the left-hand border of the diagram. For the calendars the ordinates are given in days at the right-hand border. In A. D. 2000, when 100 of our artificial years will have elapsed since 1900 March 21, the diagram shows the true sun's longitude and the progress of the calendar as follows. The perpendicular for 2000 cuts the line « Longitude of true sun »

---

(1) NICOLAUS COPERNICUS, *De Revolutionibus Orbium Caelestium*. Lib. III, Cap. 20 (numerous editions).

(2) *De Revolutionibus Orbium Caelestium*. Lib. III, Cap. 6, 7.

at + 0,48° and the appropriate line of the Gregorian Calendar figure (the lowest of the four lines, as will be explained below) at March 20, $5^h 31^m$ p. m. We may infer that the transit of the true sun over the vernal point will take place at an instant approximately 0,49 days earlier, i. e. March 20, about $5^h 46^m$ a. m. So in that particular year the calendar will be about 30^h slow, according to the standards of the Gregorian reform. This same interval of 30 hours can be read off directly, if we measure the vertical intercept for 2000 between the true sun's line and the calendar line in terms of the time scale at the right-hand side.

Part of the calendar figure is shown magnified in Figure 1 *a*. The horizontal scale has been slightly more expanded than the vertical. We denote the rise by 0,2423 days after a year of 365 days (from March 21 to March 21) and the descent by 0,7577 days after a year of 366 days. Thus, in the system of four parallel lines the lowest line represents the leap-years such as 1888, 1892, 1896; the second line the following years 1889, 1893 and so on.

The long arrow shows the general trend of the calendar figure. The calendar is apparently going slow, but it will have lost only $8^h 40^m$ in 3582, after 2000 years of the Gregorian Calendar. This comparison is to be contrasted with the usual comparison with the mean sun's year, according to which nearly 20^h are lost in 2000 years, if account be taken of the gradual shortening of the mean sun's year, and $14^h 50^m$, if the present value of the mean sun's year is used.

Figure 1 shows that the calendar figure is nearly always below the line representing the longitude of the true sun, and that the average distance corresponds to roughly 12^h. This implies that the average equinox of the true sun occurs during the night before March 21, Venetian time, as was duly remarked by CLAVIUS. As the earliest possible date for Easter Sunday is March 22, there will be practically no chance of Easter occurring before the equinox.

CORRECTNESS OF GREGORIAN MONTH

Figure 2 graphically represents the moon's synodic motion. The ordinate at the left-hand side gives the difference in longitude, mean moon *minus* true sun. The figure is arranged in essentially the same way as Figure 1, so we need not enter into too much detail. The linear cycle used here is counted backward and forward from 1800 April 9, Venetian mean noon, by multiples of an artificial month of 29,530588 days, where April 9 is the vernal *luna xiv* or calendar full moon for the year 1800. Astronomical data are taken from SCHOCH's work (1). The time scale is the same as in Figure 1, the scale in arc being about twelve times as narrow because of the greater angular velocity of the moon. The line system representing the lunar calendar is somewhat simplified. In fact the lunar calendar, apart from the lunar and solar corrections first proposed by GIGLI, is subject to continual adjustments of the same character as the quadrennial leap-year adjustments of the sun's calendar, only more complicated. If these minor changes had been individually illustrated in Figure 2, the figure would have shown a great number of different deviations from the average course of the calendar. Instead, groups of three parallel lines are shown. The middle line represents the mean trend of the calendar month as it would be if the Meton cycle were applied to the Gregorian year without any lunar or solar corrections, viz., $19/235 \times 365{,}2425$ days. The lowest and highest of the three lines are displaced by a vertical interval of 0,52 days, which is equal to the dispersion of the calendar full moon dates, in spring, about this mean trend. In the left-hand part, showing the Julian lunar calendar, the dispersion is somewhat less, viz., 0,44 days. Towards the lower right-hand corner the centenary years in which lunar or solar corrections take place, have been marked.

According to CLAVIUS, the calendar reformers wished to arrange their corrections to the lunar calendar in such a way that its vernal

(1) C. SCHOCH, *Neubearbeitung der Syzygientafeln von Oppolzer*, Mitt. Astr. Recheninst. Berlin-Dahlem, Bd. 2, Nr. 2, 1928.

luna xiv would not as a rule come much later than mean opposition, and practically never more than a full day earlier than mean opposition. As a result, Easter Sunday, which occurs on the Sunday between *luna xv* and *luna xxj* inclusive, would as a rule not be later than mean last quadrature and practically never earlier than opposition. It will be seen that the arrangement was perfect and will continue to be so for a long time. FOTHERINGHAM (1) has pointed out that the trend of the Gregorian Calendar is such that it will be faultless at a certain instant near 2200 A. D. In our figure the straight line indicating the Gregorian Calendar trend is exactly parallel to the tangent to the observational curve at the year 2200.

Thus, both the solar and the lunar part of the Gregorian reform constituted at that time a first-rank scientific achievement and the lengths of the year and the month then introduced will presumably meet all ordinary needs of chronology for thousands of years to come, even without the further adjustments which the originators had foreseen.

It is a pleasure to thank Prof. J. TESSER S. J., of Rome, for his interest in the first draft of this note. My thanks are also due to Prof. W. E. VAN WIJK, of Paris, who kindly called my attention not only to certain passages in CLAVIUS and contemporary writers, but also to a diagram of the same type as the one given here, previously published by himself in *De Natuur*.

(1) J. K. FOTHERINGHAM, the article « Calendar » in the Explanation of the *Nautical Almanac* for the years 1931 to 1938.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 5
pag. 63-66

NICOLA PARRAVANO

DISCORSO COMMEMORATIVO PRONUNCIATO ALLA AUGUSTA PRESENZA DEL S. PADRE PIO XI NELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE DEL III ANNO ACCADEMICO IL 18 DICEMBRE 1938

da FRANCESCO GIORDANI
Accademico Pontificio

Beatissimo Padre,

Nel mese di maggio del 1938 Nicola Parravano, nostro amato collega, aveva chiesto ed ottenuto l'alto onore di accompagnare i chimici di ogni parte del mondo, riuniti sotto la sua presidenza per il loro X Congresso Internazionale, esaudendo così il vivissimo desiderio che essi avevano dimostrato di raccogliersi in devoto atto di omaggio attorno al trono del Capo della Cristianità. Giunto all'apice della sua carriera terrena, circondato dalla generale estimazione, egli si era dipartito contento della benedizione ottenuta dalla Santità Vostra ben sapendo, nel suo spirito forte, ch'essa non è tanto viatico di umane fortune, quanto compagna di più duratura letizia.

Nessuno di noi pensava allora ch'egli non sarebbe più tornato alla presenza del Padre e che non gli sarebbe concesso di assistere alla ripresa dei nostri lavori in questa Sede accademica, dove aveva portato il contributo del suo alto sapere e del suo sano equilibrio. Ben egli era presago però di una fine immatura per alcuni indizi che aveva accolto con cristiana rassegnazione e che, con una straordinaria forza d'animo, aveva celato a tutti continuando a prodigarsi in un lavoro incessante. Nel pieno sviluppo di questo lavoro la morte lo ha colto dolcemente nel sonno, quasi a confermare che non si addicessero alla sua forte tempra di realizzare gli aspetti della malattia e della debolezza.

Più duro però è il rimpianto dei superstiti che non sanno rassegnarsi e che ogni giorno risentono l'improvvisa mancanza del suo consiglio sagace e della sua collaborazione feconda.

Riportati a considerare comprensivamente la massa di lavoro da lui compiuto nei soli cinquantacinque anni di vita, noi constatiamo con ammirata meraviglia che essa avrebbe potuto riempire più di una lunga esistenza. Nella pura ricerca scientifica, nell'organizzazione dell'insegnamento, nell'industria e nella pubblica amministrazione l'opera sua lascia tracce durature, senza che ciò abbia diminuito la sua azione di padre esemplare e di amico impareggiabile.

Nato ad Isola del Liri il 21 luglio 1883, aveva conseguito la laurea in chimica a Roma nel 1904, aveva poi insegnato chimica applicata a Padova, chimica fisica a Firenze e chimica inorganica a Roma. Era stato uno dei più strenui promotori di una stretta collaborazione tra la scienza e l'industria: aveva fondato e diretto l'Istituto Scientifico-Tecnico Breda per l'industria metallurgica e meccanica, aveva collaborato con Guglielmo Marconi nel direttorio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, era stato uno dei più apprezzati collaboratori dell'Istituto per la Ricostruzione Industriale.

Troppo lungo sarebbe elencare tutte le cariche che egli ricoprì e cui attese con esemplare solerzia. Basti ricordare che raggiunse le più alte posizioni accademiche in Italia ed all'estero e che fu presidente dell'Unione Internazionale di Chimica; che tenne fino agli ultimi suoi giorni la presidenza della Federazione Nazionale Fascista tra gli industriali dei prodotti chimici, egualmente apprezzato dagli uomini di scienza e dagli uomini di azione.

Al di sopra di tutto curò la formazione dei giovani, raccogliendo fondi per il loro perfezionamento, prodigandosi per fornir loro i mezzi di lavoro ed incoraggiandoli generosamente, pur senza blandizie, nel loro cammino.

L'opera sua di ricercatore non ha subito mai una sosta fino all'ultimo giorno. Restano insuperate le sue ricerche sugli squilibri nei sistemi eterogenei con particolare riguardo alle leghe metalliche: i capitoli relativi alle leghe ternarie e quaternarie gli debbono contributi sostanziali. Si occupò della tensione di decomposizione e degli equilibri di riduzione di alcuni composti ed in particolare dei solfuri giungendo ad una suggestiva analisi teorica intesa a dimostrare per quali ragioni

la metallurgia si è prevalentemente sviluppata procedendo alla riduzione degli ossidi per mezzo del carbone e tralasciando l'analoga reazione sui solfuri. Negli ultimi tempi perseguiva lo studio delle relazioni fra genesi e proprietà degli ossidi metallici.

In tutte queste ricerche la vivacità dell'ingegno e la originalità delle vedute non si scompagnano mai dalla laboriosità e precisione d'indagine, l'erudizione si completa sempre con la modernità e con la varietà della tecnica sperimentale.

La mente lucida e lo spirito sintetico di Nicola Parravano fecero di lui uno dei più brillanti espositori non solo nella scuola, ma anche in tutti i convegni culturali dove svolse opera pregevolissima di volgarizzazione e di sintesi scientifica.

Egli fu un costruttore nel più ampio significato della parola: padre esemplare per la tenerezza che nutrì verso i figli, maestro inuguagliato per la forza di propulsione che seppe imprimere agli studi chimici, amico insuperabile per generosità di giudizio e per luminosità di sorriso.

Tra gli immancabili dolori della vita egli è stato per certo l'uomo beato, di vera spirituale beatitudine, com'è descritto nel libro dei Salmi *tanquam lignum, quod plantatum est secundum decursus aquarum, quod fructum suum dabit in tempore suo.* E nessuna foglia di lui cadrà e tutte le sue opere prospereranno.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 6
pag. 67-74

FILIPPO DE FILIPPI

DISCORSO COMMEMORATIVO PRONUNCIATO ALLA AUGUSTA PRESENZA DEL S. PADRE PIO XI NELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE DEL III ANNO ACCADEMICO IL 18 DICEMBRE 1938

da ANTONIO RENATO TONIOLO
Accademico Pontificio

Beatissimo Padre,

L'amore per la montagna, il desiderio di vedere e di conoscere la resistenza ai disagi e il disprezzo pei pericoli, la volontà di superare difficoltà ed ostacoli, fecero di Filippo De Filippi uno dei migliori viaggiatori ed esploratori del secolo XIX.

Virtù d'animo e d'intelletto, equilibrio di facoltà fisiche e morali, mente direttiva ed organizzatrice, amore alla cultura con particolare tendenza alla sintesi, perfezionarono in lui la naturale attitudine alla osservazione in una solida e organica comprensione scientifica dei molti fatti e fenomeni, appresi nei lunghi viaggi e nei più svariati e compiuti studi naturalistici.

Nato a Torino il 6 aprile 1869, Filippo De Filippi, dallo zio paterno, che aveva a lungo viaggiato in Persia assieme a Giacomo Doria, ereditò col nome di battesimo la passione dei viaggi, che fin da giovane si esplicò nell'alpinismo sulle sue montagne piemontesi, che gli furono palestra per temperare mente e corpo ad ardue imprese.

Le sue prime pubblicazioni risalgono al 1887, con brevi relazioni, nella Rivista del Club Alpino Italiano, delle più notevoli ascensioni da lui compiute nelle Alpi Piemontesi e del Delfinato e nell'Oberland Bernese, fra cui quelle di Punta Ghifetti e della Punta Zumstein sul Monte Rosa (1889), del Cervino e del Monte Bianco (1900).

Egli aveva intanto compiuto gli studi medici nell'Università di Torino e iniziato ricerche di chimica fisiologica nell'Università di Bologna e di Genova, dove fu assistente e Libero Docente di medicina operatoria; studi che perfezionò più tardi in alcuni Istituti scientifici di Germania ed Austria.

Con questa sicura preparazione, fin dal 1887, egli potè stendere, con piena competenza, nel volume del Mosso, sulla fisiologia dell'uomo sulle Alpi, un accurato studio degli effetti del mal di montagna, descrivendo ed analizzando le cause della disgrazia di cui furono vittime, nel 1886, i fratelli Zoia sulle rocce del Gridone in Val Vigezzo, durante un'escursione a cui egli stesso aveva preso parte.

La sua perizia medica e chirurgica fu poi da lui posta a servizio della Patria durante la grande guerra, quale tenente colonnello della Croce Rossa italiana e ispettore delle unità sanitarie mobilitate al fronte.

Ma il suo nome di provetto alpinista e di viaggiatore attento e organizzatore valente, gli valsero l'onore e la responsabilità di essere invitato da S. A. R. il Duca degli Abruzzi nel 1897, a prendere parte alla spedizione esploratrice al Monte S. Elia nell'Alaska, insieme, fra gli altri, ad Umberto Cagni, illustratosi, tre anni dopo, per la sua marcia verso il Polo, e a Vittorio Sella, fotografo insuperabile delle grandi esplorazioni italiane. Con tutta la carovana, egli riuscì a raggiungere la vetta del monte, a m. 5514 (31 agosto 1897), che nessuno prima di allora aveva calcato. Benchè l'esplorazione avesse carattere quasi esclusivamente alpinistico, per suo merito fu raccolta una copiosa serie di dati meteorologici e di osservazioni bio-geografiche, sui grandi ghiacciai alaskiani, cosicchè fu incaricato di stendere la relazione, la quale ebbe carattere non soltanto narrativo, ma anche critico sui precedenti falliti tentativi di salirne la vetta, ed illustrativo dei problemi generali relativi all'alta montagna (1900).

Ma nel 1903 egli compì, per suo conto, un altro viaggio di studio attraverso alla Russia Europea, al Caucaso a al Mar Caspio, spingendosi a visitare il Turchestan russo e Bucara e facendo ritorno in Europa per la via del Mar Nero e della Crimea.

La sua fama ormai consolidata di studioso dei problemi della montagna e di scrittore facile ed attraente, gli valsero ancora l'incarico di stendere, sul materiale raccolto e sui dati del giornale di viaggio, la

narrazione dell'esplorazione del Ruvenzori, compiuta nel 1906 dal Duca degli Abruzzi, alla quale non aveva potuto prender parte, ma che tuttavia è risultata una delle più affascinanti relazioni di viaggio della nostra letteratura geografica (1908) e che allargò ancor più le sue profonde cognizioni sui tre continenti extraeuropei.

Così il Principe Sabaudo, non volle rinunziare alla diretta collaborazione del De Filippi, quando, nel 1909, allestì la nuova spedizione nel grande complesso montuoso del centro dell'Asia, anche allo scopo, fra gli altri, di studiare il problema della maggiore altezza raggiungibile dall'uomo con lo sforzo alpinistico. Ed anche questa volta è al De Filippi che viene affidata la difficile ma perfetta organizzazione logistica della spedizione, in vaste regioni disabitate e con portatori venuti di lontano e non abituati a marciare fra i ghiacci. A lui, insieme al Comandante Negrotto di Cambiaso e Vittorio Sella spetta il merito di avere esplorato il Ghiacciaio del Bàltoro e compiuta l'ascensione di una delle vette del Karakorum fra l'Himàlaja e i rilievi dell'Asia Centrale.

E ancora a lui è dato l'incarico di stendere la relazione del viaggio, dove viene illustrato per la prima volta il Ghiacciaio del Bàltoro, uno dei maggiori della Terra, sul quale la spedizione si attardò per ben 67 giorni, rilevandone i caratteri topografici e fisici.

Con quanta vivezza viene quivi descritto il tentativo per due volte vano di salire la cima K^2 per due versanti diversi, pur raggiungendo la quota di 6666 metri! E mentre il Principe riuscirà poi a portarsi a m. 7498, presso la vetta del Bride Peak, quota mai fino allora raggiunta con le sole forze muscolari, dal campo base, a m. 5033, egli compirà il rilievo del Ghiacciaio occidentale dal K^2.

Modestamente il De Filippi attribuisce agli altri i meriti maggiori, ma a lui si devono la raccolta e conservazione dei molti elementi topografici, meteorologici e geologici, illustrati poi dall'Omodei e dal Novarese, e per i quali la scienza geografica potè avere il rilievo fotogrammetrico e fisico del bacino superiore del Ghiacciaio del Bàltoro, e le scienze fisiologiche le prove scientifiche delle possibilità umane in alta montagna.

L'esperienza acquistata in questo viaggio e gli studi coscienziosi compiuti nei vari campi delle scienze naturali e geografiche per poterne

stendere la relazione, indussero il De Filippi a concepire ed organizzare, per il 1913, una propria spedizione nell'Himàlaja occidentale, nel Karakorum e nel Turchestan orientale con caratteri questa volta strettamente scientifici nei vari campi della Geografia. Dopo consultazioni numerose e ponderato studio, fu scelto come campo di esplorazione il bacino superiore dell'Indo, fra l'Himàlaja e il Karakorum del quale avrebbesi dovuto rilevare topograficamente lo spartiacque orientale fra i fiumi Jarkand del Turchestan Cinese e lo Sciaiok affluente dell'Alto Indo; si dovevano inoltre studiare le anomalie di gravità, di magnetismo e di radiazione solare in quella regione di vasti altipiani e di massime catene del Mondo, e ricercare la natura geologica e la glaciologia di quelle estese regioni della Terra, nonchè rilevare i caratteri, i tipi e la vita di razze e di genti mai studiate, fino allora, per poter avere una illustrazione geografica completa di tutta la regione da percorrere.

Il De Filippi, che assunse questa volta in pieno la direzione della spedizione, chiamò attorno a sè geografi e scienziati di fama assai grande, quali il Dainelli per le ricerche sulla geologia, sul glaciale e l'antropogeografia; l'Abetti per la geodesia e la topografia; l'Alessio per la geofisica e il magnetismo, e più tardi Olinto Marinelli per lo studio morfologico della regione. Con volontà e tenacia sotto gli auspici dei governi d'Italia e dell'India, affrontò le molte difficoltà di organizzazione, cominciando da quella finanziaria, che superò col generoso contributo di Istituti scientifici e di cittadini italiani e stranieri. Sua fu tutta la cura della preparazione e direzione della carovana, che doveva portare oltre 6200 kg. di materiale scientifico e di viveri in regioni disabitate e di altissima montagna, dove enormi divengono le difficoltà del trasporto. Questa grandiosa spedizione, nel 1913 e 1914, con due campagne estive e lo sverno intermedio, potè raccogliere un enorme materiale, il cui esame ed illustrazione, dopo la grossa relazione della spedizione da lui stesa, importò la pubblicazione, fra il 1922 e il 1935, di ben 16 volumi in 4° da parte degli esploratori.

Riassumere solo brevemente i risultati di questa, che è stata una delle più grandiose spedizioni scientifiche nel cuore dell'Asia, sarebbe qui assai difficile, ma non è da tacere l'importanza geografica dell'esplorazione del grande Ghiacciaio del Rimu, la determinazione delle sorgenti dell'Jarcand e delle maggiori serie di catene Tibetane.

Il mondo scientifico internazionale riconobbe ben presto tutta l'importanza dell'esplorazione e i grandi meriti del De Filippi, ad onta che egli, per la sua innata modestia abbia sempre taciuto o posto in secondo piano la sua opera scientifica ed organizzativa, cosicchè fu insignito dal Governo delle Indie di un'alta onorificenza nobiliare, le principali società geografiche mondiali, quali la R. Società Geografica Italiana, la Royal Geographical Society di Londra, la Société de Géographie di Parigi, la Società Geografica Americana, si onorarono di premiarlo con medaglia d'oro, mentre l'Accademia delle Scienze di Parigi, quella di Torino e la R. Accademia d'Italia gli attribuirono premi, che egli generosamente cedette ad istituzioni scientifiche.

Frattanto veniva nominato Membro onorario anche delle Società Geografiche di Berlino, di Romania, di Francia, degli Stati Uniti, della R. Accademia dei Lincei, delle quali onorificenze tutte egli sapeva tacere, schivo come era di ogni esibizionismo, sempre pronto a lavorare per gli altri, se riconosceva il valore dell'opera compiuta.

Ritiratosi nel 1921 ad abitare con la famiglia dell'eroico fratello Ludovico, Capitano di Vascello, morto in guerra, alla « Capponcina » di Firenze, continuò, anche qui, con la sua indomita energia ad occuparsi di studi geografici, e nel 1928-1929 assunse ancora la redazione editoriale delle ulteriori imprese di S. A. R. il Duca degli Abruzzi per l'esplorazione del corso dell'Uabi e l'Uebi-Scebeli in Etiopia (1928-1929) e quindi preparò e pubblicò, in lingua inglese l'edizione integrale della relazione sul Tibet del P. Ippolito Desideri S. J. da Pistoia dei primi del XVIII secolo oltre ad altre note d'indole critica e storica.

Ma la sua vita fiorentina non fu solo di raccoglimento e di studio, chè quando nel 1928, il Generale Vacchelli, Direttore dell'Istituto Geografico Militare Italiano, assunse la presidenza dell'Union Géographique Internationale, il De Filippi gli fu a fianco quale Segretario Generale e molto a lui si deve della perfetta organizzazione del Congresso Internazionale di Geografia di Parigi (1931) sicchè la sua fama si accrebbe ancora più largamente anche nel campo degli studiosi di Geografia, per cui ben si comprende come nel 1936, quando il Santo Padre volle benignamente istituire la Pontificia Accademia delle Scienze, pensasse al De Filippi, quale onore e decoro del nostro Consesso.

La sua dipartita avvenuta improvvisamente il 23 settembre 1938 lascia nel campo degli esploratori e dei geografi del mondo intero, un grande rimpianto e nella nostra Accademia un vuoto difficilmente colmabile perchè abbiamo perduto con lui un collega carissimo che alle tante benemerenze nel campo dell'esplorazione geografica, alla elevatezza della mente e alla larghezza della cultura univa quella squisita bontà dell'animo e quella modestia del sentire, tutta propria di chi sa comprendere ed amare la natura che fra le cime nevose ed i picchi arditi lascia vedere più direttamente Dio al quale Egli sinceramente ed umilmente credeva.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 7
pag. 75-88

GUGLIELMO MARCONI

DISCORSO COMMEMORATIVO PRONUNCIATO ALLA AUGUSTA PRESENZA DEL S. PADRE PIO XI NELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE DEL II ANNO ACCADEMICO IL 30 GENNAIO 1938

da GIANCARLO VALLAURI
Accademico Pontificio

Beatissimo Padre,

la nostra vita terrena, anche quando trascorre più solitaria e più raccolta, ci impone l'obbligo e ci concede il privilegio di avere commercio spirituale con gran numero di altri uomini. Nell'accostarci a ciascuno di essi, siamo presi da un senso di riverenza, perchè, qualunque egli sia, appariscono incancellabili su di lui i segni dell'immagine e della somiglianza divine impressigli dal Creatore. Il nostro fratello può esserci grandemente diletto, può essere legato a noi da lunga ed intima consuetudine; ma l'anima sua è un'entità così ricca di elementi ultraterreni e si muove in una sfera così vasta ed inaccessibile, che non potremmo illuderci di conoscerla appieno, anche se avessimo potuto seguirne una ad una tutte le manifestazioni esteriori. Che anzi della stessa anima nostra sentiamo sì gl'impulsi e gli slanci, ma ben chiaramente avvertiamo, com'essi si alimentino di una virtù misteriosa, che scende dall'alto.

Quando poi al nostro simile ci accostiamo per obbedire al compito assegnatoci di studiarne l'opera e di delinearne la figura, ecco che alla riverenza si aggiunge un senso di sgomento. È lo sgomento di chi viene chiamato ad una bisogna necessariamente superiore alle sue forze; perchè in quel compito è implicito l'obbligo di formulare, o almeno di sottintendere un giudizio. E il fatto che gli uomini si giudichino tra loro, può essere ineluttabile necessità sociale, ma non è certo im-

presa che essi siano in grado di compiere, se non in modo provvisorio e precario.

Impresa ancor più difficile e grave, quando la figura da porre in luce sia quella di un uomo singolare, meritamente salito in grandissima fama, quando la vita di lui sia stata per tanti motivi diversa dalla nostra, e quando per di più fra lui e noi si sia frapposta la maestà della morte.

Questi sentimenti occupano l'animo mio, mentre mi accingo, per volere della presidenza di questa Accademia, a dire di Guglielmo Marconi.

L'universale commozione per la sua dipartita ben valse a mostrare quali echi quel nome rivegliasse in ogni angolo della terra. Per schiere innumerevoli di uomini la sua figura era vestita di leggenda, sì che l'annuucio della sua morte potè quasi apparire un richiamo alla ferrea legge, cui tutti i viventi debbono conformarsi. Invero, poichè la notizia dall'invenzione e la fama dell'inventore già avevano corso il mondo, prima che si chiudesse l'altro secolo, potevano i meno edotti credere che già da tempo egli avesse compiuto il suo ciclo mortale o almeno che avesse raggiunto gli anni della più tarda vecchiezza. Fu colto invece da morte quasi improvvisa nella notte sopra il 20 luglio 1937, in età di 63 anni.

Già molte volte è stato ormai rievocato il corso della sua vita, a cominciare da quel primo periodo che va dalla nascita, avvenuta in Bologna il 25 aprile 1874, alle esperienze eseguite a Pontecchio nell'estate del 1895. S'è detto dell'influenza che esercitò sul suo temperamento da un lato e dall'altro sulle vicende iniziali e decisive della sua carriera, l'essere figlio di padre italiano e di madre irlandese. Sono noti, attraverso testimonianze di familiari, di maestri e di compagni, quei suoi primi anni giovanili, trascorsi senza troppo adattarsi a seguire docilmente il cammino scolastico, tracciato per la grande maggioranza dei ragazzi.

Sono molte e sicure le prove della sua passione per la fisica ed in ispecie per l'elettrologia, dell'impegno e dell'acume con cui ne

approfondiva lo studio e ne coordinava le nozioni, dell'entusiasmo, della tenacia e dell'abilità, con cui si dedicava egli stesso, con mezzi di ripiego e di fortuna, a sperimentare nei campi di ricerca più nuovi e più attraenti, rifuggendo da ogni speculazione astratta per rifarsi sempre, e ciò fu poi norma costante di tutta l'opera sua, alla prova dei fatti.

Dallo studio dell'elettricità atmosferica e dal modo di rilevarne le manifestazioni, fu naturalmente condotto ad occuparsi con interesse delle onde elettromagnetiche, preconizzate da Maxwell, prodotte e dominate sperimentalmente da Hertz, investigate acutamente da Righi e da altri.

È noto in qual senso la teoria di Maxwell abbia costituito una svolta decisiva alla scienza dei fenomeni elettrici. Fino ad allora le azioni elettriche e magnetiche erano concepite come azioni a distanza, sorgenti in luogo nell'istante medesimo in cui altrove se ne costituisca la causa. Istantaneo ovunque il campo elettrico prodotto da una carica, che compaia in una certa porzione di spazio; istantaneo il campo magnetico che si aggiunge al primo, quando quella carica si muova. Concezione, che giustamente fu detta newtoniana.

È noto altresì, ed in ciò sta il fascino della teoria di Maxwell, come, prendendo le mosse da leggi sperimentali, formulate secondo concetti prettamente newtoniani, essa giunga in certa guisa a negare le sue premesse, a rifiutare le azioni istantanee a distanza, a prevedere la propagazione dei fenomeni elettromagnetici con velocità finita ed a calcolare questa velocità. Concezione maxwelliana, rivoluzionaria rispetto alla prima ed in assoluto contrasto con essa.

Il contrasto, nonostante le decisive esperienze di Hertz e dei suoi seguaci, restava non chiarito nella mente di molti; e fu causa di confusione e di errori nelle appassionate polemiche, cui diede luogo nei primi anni la radiotelegrafia. Contrasto latente ancor oggi nella mente di innumerevoli tecnici, che, operando su fenomeni lenti e su porzioni di spazio limitate, in confronto con la estrema velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche, non han modo di rilevare alcuna differenza fra l'una e l'altra interpretazione dei fatti.

Guglielmo Marconi, quando nell'estate del 1895 portò fuori dal modesto laboratorio, pazientemente attrezzato a furia di ingegnosi ripieghi nella villa paterna, il suo ricevitore e, affidatolo ad un giovane contadino, effettuò le prime prove di trasmissione a distanza, segnò una data incancellabile nella storia delle conquiste, che la Provvidenza concede all'umano ingegno di compiere.

I fisici lavoravano da anni, da lustri ormai, intorno alle esperienze di Hertz; le onde elettromagnetiche erano note; si sapeva generarle, irradiarle, rifletterle, rifrangerle, raccoglierle, rivelarle; ma tutto ciò accadeva nell'ambito delle sale di un istituto di fisica. Nessuno aveva pensato a trarne seriamente profitto.

Per questo Marconi si distacca e si eleva per sempre su tutti gli altri. Ed è forse più giusto, e meglio illumina la grandezza del suo merito, l'affermare, non già che alcuno non avesse pensato ad un simile tentativo, sì bene che nessuno vi aveva « creduto ». Le grandi conquiste, in ogni campo, sono primamente frutto di un atto di fede.

Del pensiero di lui in quel periodo giova ripetere quanto volle egli stesso che con grande semplicità fosse detto: « Nel 1895 prese salda radice nella sua mente l'idea, che le onde elettriche, la cui esistenza era stata prevista matematicamente da Maxwell nel 1864 e poi dimostrata sperimentalmente da Hertz, da Lodge, da Righi e da altri, avrebbero potuto fornire il mezzo di telegrafare attraverso lo spazio a grande distanza, senza l'ausilio di fili conduttori » (1).

Chi voglia tratteggiare l'opera di Marconi a partire da quei giorni, non può non ritessere la storia della radiotecnica. L'una e l'altra per buon tratto si identificano e restano poi, fino alla triste data della morte, strettamente intrecciate.

Salito precocemente al vertice della rinomanza e della gloria, Marconi vagheggiò altre conquiste. Basti ricordare, tralasciando i ritrovati di interesse militare, l'accumulatore elettrico leggero e l'utilizzazione delle tenui quantità di oro diffuse nell'acqua di mare. D'altro lato,

(1) Biografia in « Annuario della Pontificia Accademia delle Scienze », vol. I, 1937, pag. 528.

cariche di ogni genere nel mondo industriale, finanziario, accademico, diplomatico, politico, richiesero parte non piccola della sua attività. Ma l'evolversi della grande invenzione, cui il suo nome sarà sempre legato, rimase per lui oggetto preferito di ogni pensiero, scopo di ogni lavoro.

Sarebbe davvero difficile graduare, a seconda del loro pregio, i contributi, che durante un quarantennio egli arrecò ininterrottamente al progresso della radiotecnica. Se immaginiamo il cammino ideale, da essa percorso in quei quarant'anni, come una grande strada maestra, non solo la vediamo aprirsi attraverso un arco trionfale eretto in onore del Nostro, ma ritroviamo anche, osservando le pietre miliari, che taluna delle più salienti è a lui dedicata e che tutte, su una faccia o su l'altra, ricordano il suo nome. Il viandante, che ripercorre quella strada, sa di camminare sotto il segno di Guglielmo Marconi.

Le tappe dei primi anni furono faticose e difficili, ma anche rapide ed incalzanti. Nel '96 il passaggio in Inghilterra, la ripetizione, dinanzi ad un'accolta di tecnici, delle esperienze di Pontecchio ed il loro perfezionamento, il primo brevetto. Nel '97 le prove in Italia, alla Spezia, esordio delle comunicazioni fra le navi e la terra, fonte di inestimabili benefici per gli uomini; e la costituzione della prima compagnia inglese per le radiocomunicazioni. Nel '98 i collegamenti della costa britannica con l'isola di Wight e col panfilo del duca di Galles. Nel '99 il servizio attraverso la Manica.

I progressi nei risultati pratici sono frutto a lor volta di continui perfezionamenti tecnici. L'inizio medesimo delle applicazioni ed il loro primo sviluppo sono legati alla felice estensione dell'oscillatore di Hertz, che vien collegato per un estremo alla terra, e per l'altro ad un conduttore sempre più sviluppato in altezza, l'antenna; ed in pari tempo alla trasformazione del coesore, da un curioso e capriccioso dispositivo di esperienza, in un apparecchio, per quei tempi, sensibile e sicuro,

Alla vigilia di nuove conquiste un altro passo decisivo si compie con la comparsa del sistema a circuiti accoppiati e accordati, con l'applicazione cioè di un nuovo e fecondo concetto essenziale: quello di separare il circuito destinato a produrre le oscillazioni nel trasmettitore, o a rivelarle nel ricevitore, dal circuito di antenna destinato ad irra-

diare o a captare le onde, così da poter bene adattare ciascuno dei due alla sua funzione specifica. Con questo nuovo strumento, mentre le radiocomunicazioni si affermano rapidamente nei servizi navali, ecco Marconi avventurarsi quasi in segreto nel tentativo, che era da tempo il suo sogno, di superare coi radiosegnali l'oceano.

Contro le previsioni dei più autorevoli uomini di scienza ed in mezzo alla generale incredulità, sormontato, non meno con la tenacia e con la fede che con l'ingegno, ogni ostacolo, egli conquistò nel dicembre 1901 la famosa vittoria. Cui seguirono nuovi successi, a cominciare dai risultati della campagna della « Carlo Alberto »: invenzione del rivelatore magnetico (1902), dimostrazione dell'altitudine delle onde a contornare la curvatura terrestre e le sue asperità montagnose, osservazioni decisive sulle relazioni fra lunghezza d'onda del segnale e portata diurna e notturna.

La radiotelegrafia si affermava così nel mondo, si costituivano per essa nei maggiori paesi importanti compagnie industriali e commerciali; si accresceva ognor più la somma di lavoro scientifico e tecnico dedicato al nuovissimo campo. Ma, per il collegamento fra punti fissi, le comunicazioni su filo e su cavo continuavano a godere di una netta superiorità. Soddisfare per mezzo delle onde elettriche alle esigenze di un servizio, che assicurasse l'immediato contatto, in ogni istante e con qualsiasi condizione atmosferica, fra due punti del globo posti alle maggiori distanze, era sì la meta a cui si tendeva, a cui si sperava di giungere con l'aiuto di perfezionamenti continui; ma, per tutto il decennio che precedette la grande guerra, quella meta rimase lontana; e già si temeva che potesse dimostrarsi irraggiungibile.

Onde sempre più lunghe: potenze sempre più grandi; antenne sempre più alte; perfezionamento negli apparati; evoluzione dalle oscillazioni smorzate a quelle persistenti, prodotte con lo scaricatore a scintille ritmiche di Marconi, o con l'arco, o con i generatori elettromeccanici. Ma si era ad un punto morto; perchè si era fuori strada.

E ecco, durante la guerra e poco dopo di essa, due avvenimenti nuovi e decisivi, strettamente legati fra loro, che mutano del tutto l'in-

dirizzo della radiotecnica: l'avvento dei tubi elettronici e quello delle onde corte.

Anche nella nuova fase la parte svolta da Marconi fu di prevalente rilievo. A lui sopra tutto si devono le prime prove decisive sulle grandi possibilità riservate alle onde corte, a lui le osservazioni sistematiche e chiarificatrici sulle leggi che ne governano il propagarsi; a lui l'affermazione e lo sviluppo dei sistemi a fascio, che hanno assicurato perfetti collegamenti su qualunque distanza, che hanno arrestato, probabilmente per sempre, il costoso ed ormai inutile infittirsi della rete dei cavi oceanici.

Intanto, dal grande tronco della radiotecnica, si sviluppava rigoglioso e potente il ramo della radiodiffusione, mentre d'altro lato i successi delle onde corte stimolavano i ricercatori a tentare la via delle onde sempre più corte, fino alle così dette microonde. Nel dominio di queste ultime ecco ancora Marconi in prima linea con nuovi successi e nuovi primati; fra gli altri il collegamento, effettuato appunto con stazioni a microonde, fra la Città del Vaticano e la Villa di Castel Gandolfo.

Sebbene gravato dal peso di tante cariche e di tanti onori e forse già minato nella salute fisica, egli conservò fino all'ultimo l'interesse per questo suo lavoro, il desiderio di attendervi, la fiducia di trarne nuovi frutti a vantaggio della Patria e dell'Umanità.

La vita ed il destino di Marconi subirono l'influenza di un fatto, manifestamente eccezionale nel campo dei nostri studi: l'avere egli conquistato il successo in età di poco più che vent'anni. La stessa sua vita spirituale non potè non risentirne gli effetti. Invero egli sempre mi apparve tal uomo, cui, accanto alla soddisfazione di continuare fino all'ultimo la sua opera e di vederla in mille modi riconosciuta ed esaltata, toccò forse in parca misura quella dolce e benefica felicità, che ad ora ad ora è concessa, conforto od incitamento, agli uomini.

La vita e la figura del Nostro non sono, per tanti motivi, quelle consuete degli uomini di scienza. Per ricostruire l'opera sua, non basta leggere i brevi scritti, quasi tutti in forma di conferenze. Conviene rac-

cogliere molti altri elementi ed in specie esaminare gran numero di brevetti e studiare descrizioni di apparati e di impianti, eseguiti dal grande organismo industriale, che porta il suo nome.

È bene tuttavia gettare uno sguardo sul più antico fra gli scritti, che egli volle fossero ricordati; la conferenza tenuta il 2 marzo 1899 all'Istituto degli ingegneri elettricisti britannici ([1]). Vi si rilevano tutti gli elementi propri del suo modo di pensare e di affrontare i problemi. Mi sia perciò lecito di ricordare alcuni suoi concetti e di ripetere, non senza emozione, taluna almeno delle sue parole.

Non indugiarsi sulla teoria, ma basarsi sui fatti. Dice egli fin dalle prime righe: « Non è mia intenzione stasera di esporre le mie vedute o di discutere la teoria del mio sistema ». E subito dopo: « Spero di porvi innanzi esatte informazione su ciò che è stato fatto ».

Riconoscere i meriti dei collaboratori e dei maestri: « Prima di entrare in argomento desidero affermare, che ogni successo da me conseguito nella pratica applicazione della telegrafia senza fili è da attribuirsi in larga misura all'efficace collaborazione, che i miei assistenti mi hanno prestato ». Più avanti, il primo oscillatore di cui parli, lo chiama « oscillatore di Righi » e, nominato il coesore o radioconduttore, soggiunge: « Credo di aver ragione di dire, che fu scoperto dal professore Calzecchi Onesti di Fermo, perfezionato da Branly e modificato da Lodge e da altri ».

È poi sorprendente, quale indizio del suo intuito, trovare in embrione in quel discorso molti dei concetti, che maturarono nella radiotecnica assai più tardi. E taluni non appaiono in embrione, ma già concretamente formulati. Colpisce ad esempio l'idea, espressa lucidamente, della futura radiogoniometria; e più fan meraviglia la descrizione delle esperienze fin d'allora eseguite con onde cortissime, dirette a fascio mediante riflettori, e l'esposizione dei pregi di un tale sistema, che, per effetto della immaturità della tecnica, non potè attuarsi praticamente se non dopo più che trent'anni.

([1]) Paper by Marconi M. I. E. E. on « Wireless Telegraphy » read at the Meeting of the Institution of Electrical Engineers, March 2nd, 1899.

A quelle pagine dei primordi si ricollegano con piena rispondenza gli ultimi scritti tecnici di Marconi: la conferenza del 2 dicembre '32 sulle « radiocomunicazioni con onde cortissime » (1) e la nota « sulla propagazione di microonde a notevole distanza » (2).

Per la lettura di quest'ultima, Marconi convocò in adunanza straordinaria, il 14 agosto '33, la Classe di Scienze Fisiche della Reale Accademia d'Italia. È una nota brevissima in cui, nello stesso stile di quell'antico discorso del 1899, si parla delle esperienze su microonde di frequenza 500 megahertz (lunghezza d'onda 60 centimetri), compiute fra la stazione di Santa Margherita ed il panfilo « Elettra »: si citano solo fatti accertati, ed uno massimamente, che è la possibilità di raggiungere, in contrasto con l'opinione allora prevalente, portate assai maggiori della portata ottica; non si dimenticano i collaboratori, ed in particolare l'ing. Mathieu; si riafferma la prudente diffidenza verso le pure deduzioni teoriche. Dice Marconi: « La spiegazione teorica dei risultati conseguiti presenta, a parer mio, serie difficoltà ». E conclude: « Dopo ulteriori e più complete e prolungate esperienze, mi propongo di pubblicare una dettagliata memoria sui metodi impiegati e sui risultati ottenuti, ed esprimo la speranza che, oltre a speculazioni teoriche, le quali potranno essere di interesse scientifico, gli odierni risultati possano condurre a nuovi e sostanziali progressi nel campo delle radiocomunicazioni ».

Non si possono rievocare quel proposito e quella speranza senza pensare, con profondo rimpianto, che non leggeremo mai più la memoria, ch'egli si prometteva di scrivere. Ma l'opera, che ricevette da lui il primo impulso e, per otto lustri, il più vitale alimento, che si giova ormai nella scienza e nella tecnica del lavoro appassionato e concorde di schiere innumerevoli di studiosi, che ha dato frutti di immenso valore a vantaggio di ogni forma dell'attività umana, quell'opera con-

(1) G. Marconi, *Radiocomunicazioni con onde cortissime*, in « Alta Frequenza », 1933, vol. II, pag. 5.

(2) Id., *Sulla propagazione di micronde a notevole distanza*, in « Memorie della Classe di Scienze F. M. N. della R. Accademia d'Italia », vol. IV, 1933, pag. 481.

tinua e si svolge sempre più intensa e molteplice, nel nome di lui e quasi ancora sotto la sua guida.

Perciò noi sentiamo presente il suo spirito. In modo speciale lo sentiamo presente in quest'ora ed in questa sede. Nella Città del Vaticano, sorta grazie ad un accordo auspicato e sperato da gran tempo ed universalmente esaltato, Marconi curò con amore la costruzione dei primi apparati di radiotrasmissione del nuovo Stato. Qui il Sommo Pontefice volle, che il giorno inaugurale ed il nome dell'inventore e il compito altissimo, riservato alle onde eteree, di recare ovunque la voce del Supremo Pastore, fossero ricordati nei secoli da questa iscrizione superbamente efficace (1).

PIVS XI PONT. MAX.
CIVITATE VATICANA IAM EX LATERAN. PACTO CONDITA
VT SVPREMI PASTORIS VOX
PER AETHERIS VNDAS
AD CHRISTI REGIS GLORIAM ANIMARVMQVE AVXILIVM
IN FINES ORBIS TERRAE AVDIRETVR
OPERIS PRAESIDE MARCONIO IPSO
TANTAE ARTIS REPERTORE
APTE HANC SEDEM ET MVNIFICE CONSTITVIT
ATQVE IX ANNIVERS. CORONATIONIS DIE
PRAESENS DEDICAVIT

Nella schiera degli uomini grandi, saliti in alta fama per merito dell'ingegno, Guglielmo Marconi non soltanto primeggia. Egli rende altresì testimonianza sicura dell'origine sovrumana delle nostre ispirazioni migliori. Dinanzi ad ogni più difficile problema, egli apparisce guidato da un mirabile intuito, che non poteva essere soltanto opera d'ingegno e frutto di studio, di esperienza e di riflessione.

In realtà ciò accade sempre, anche se in modo non altrettanto manifesto. In ogni conquista del pensiero è il bagliore di una luce che non viene da noi e che spinge i suoi raggi oltre il segno, cui il nostro sguardo può giungere.

Grandi e piccoli, tutti siamo intenti ad un lavoro che si continua nei secoli, tutti siamo operai di una ciclopica impresa. Ciascuno cerca

(1) Dettata dal Cancelliere dell'Accademia Dott. Pietro Salviucci.

di perfezionare gli attrezzi di lavoro o si sforza di portare almeno la sua pietra. Ogni invenzione, ogni scoperta rende più lieve e più proficua una parte della fatica. Ma l'opera nel suo insieme è troppo grande, poichè possiamo scorgerne il disegno, rilevarne i progressi e ben comprenderne gli scopi. L'Artefice, infinitamente più grande di noi, ci concede di imparare a giovarci sempre meglio di quelle che chiamiamo forze della natura, non già di penetrarne l'intima essenza. Egli ci richiama così al nostro compito di strumenti, liberi e responsabili, ma strumenti dei suoi disegni supremi. È Lui che guida il nostro intelletto, Lui che illumina la mente nostra.

Chi narrerà la vita di Marconi, destinata a circondarsi ognor più di un alone di leggenda, non potrà trascurare l'episodio della visita di lui ventenne alla Madonna d'Oropa, nè dimenticare le sue calde parole all'amico, cui confidava: che in alto sul monte, presso la cappella detta del Paradiso, guardando la pianura lontana, un'idea portentosa gli aveva attraversato la mente. E lo pregava di ricordare quel giorno.

Oggi una lapide orna il Santuario (1) e dice:

DALLA CHIOSTRA DEI MONTI D'OROPA
GUGLIELMO MARCONI
DEDUSSE IL VATICINIO DELLA SUA GRANDE SCOPERTA
POSSA LA TELEGRAFIA SENZA FILI
AUPISCE MARIA
PACIFICARE GLI UOMINI IN CRISTO

(1) Dettata da Emanuele Sella.



ACTA
Vol. XIII - N. 8
pag. 87-92

GUGLIELMO MARCONI

Discorso commemorativo pronunciato alla augusta presenza del S. Padre Pio XI nella solenne Tornata Inaugurale del II Anno Accademico il 30 gennaio 1938

da W. F. K. BJERKNES
Accademico Pontificio

Heiliger Vater!

Es ist mir eine grosse Ehre in dieser Versammlung und bei dieser Gelegenheit das Wort ergreifen zu dürfen, zum Gedächtniss des grossen Wohltäters der Menschheit, Marconi. Ich bedaure bei einer solchen Gelegenheit eine Sprache reden zu müssen, die weder meine Muttersprache noch Ihre Sprache ist. Aber gerade dieser Umstand unterstreicht den universellen Character dieser Gedächtnissfeier.

Marconis gosses Verdienst lässt sich in wenigen Worten zusammenfassen: die elektrischen Wellen, die Heinrich Hertz der Wissenschaft erschloss hat Marconi in den Dienst der Menschheit gestellt, und mit Fähigkeiten ausgestattet, die man sich früher nicht hat träumen lassen.

Ich rede hier in der Eigenschaft eines Schülers von Heinrich Hertz — ich glaube ich bin der einzige noch lebende persönliche Schüler, des so früh dahingeschiedenen grossen Forschers. Dank meiner Verbindung mit ihm und mit seiner Familie, habe ich hier ein eigenhändiges Manuskript meines grossen Lehrers. Es ist das Originalmanuskript der Abhandlung, in der er uns die elektrischen Wellen schenkte, die Wellen die nachher Marconi in so wundervoller Weise in der Dienst der Menschheit gestellt hat. Der berühmte Titel ist: « Über elektrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion ». Diese Worte « Wellen im Luftraum », also drahtlose Wellen, war das fundamental Neue — allerdings von Clerk Maxwell geahnt, aber erst von Hertz

physikalisch nachgewiesen. Wie Sie sehen, anthält das Manuskript 19 beschriebene Seiten. Selten haben wohl 19 Seiten so tief in die Geschichte der Menschheit eingegriffen.

Hertz hatte Versuche mit seinen « primären Schwindungskreis » und seinem « secundären Schwindungskreis » angestellt. Dabei war er einer Erscheinung begegnet, die er meinte, als elektrische Resonanz deuten zu müssen. Weitere Versuche mit dieser Erscheinung liessen ihm vermuten, dass sein primärer Schwindungskreis — in einer noch verborgenen Weise — die von Maxwell geahnten elektrischen Wellen aussende. Dann hatte er, in den Osterferien 1888, den Hörsal seines Laboratioriums ausgeräumt, an der einen Wand seinen primären Schwindungskreis aufgestellt, und die andere Wand mit Metallplatten bedecht, die gegebenenfalls die Wellen wie Spiegel reflektieren sollten. Und es gelang ihm wirklich, mit seinem sekundären Schwindungskreis — d. h. dem ersten Empfänger, Knoten und Bäuche stehender Wellen im kleinen Raum vor dem Spiegel nachzuweisen.

Dies ist der schlichte Inhalt des Manuskriptes. Die Wellen waren da; die damals so bescheidenen Wellen, die aber bald, Dank Marconis Genie, den ganzen Erdball umkreisen solten.

Was liegt aber zwischen der wissenschaftlichen Entdeckung von Hertz, und der so tief in unserem Leben eingreifenden Leistung Marconis?

Es soll sich einmal ein Ingenieur an Hertz gewendet haben, mit dem Vorschlag, diese neue Wellen für drahtlose Telegraphie zu verwerten, und Hertz soll abgeraten haben. Ob dieser Bericht wahr ist, habe ich nicht feststellen können. Wenn aber Hertz wirklich gefragt worden ist, so bin ich nicht im geringsten im Zweifel, dass er, so wie die Sachen damals standen, als gewissenhafter Mensch abraten musste. Man hatte sich noch lange nicht in der neuen Erscheinungswelt zurecht gefunden. Wie man die Schwierigkeiten, die wohl niemand besser als Hertz voraussah, überwinden sollte, war zu jener Zeit nicht zu erkennen. Die Bahn des Erfinders ist eine der gefährlichsten, die man betreten kann. Abraten ist Pflicht, wenn nicht Aussicht auf einem einigermassen sicheren und einigermassen schnellen Erfolg vorliegt, und diese schien Hertz nicht vorhanden.

Wie wenig man sich in der neuen Erscheinungswelt zurechtgefunden hatte, sollte sich auch bald zeigen. Die ersten Physiker, die die Hertz-

schen Versuche wiederholen oder ergänzen wollten, brachten mehr Verwirrung als Aufklärung. Die Folge war dass auf die Periode wärmster Anerkennung der Hertzschen Leistungen, eine Periode recht verbreiteten Misstrauens folgen sollte. Im Glanze des Schlusserfolges ist diese Periode längst vergessen: niemand liest mehr die alten, kritisch angehauchten Schriften. Wer die Zeit miterlebt hat, vergisst aber weder die öffentlichen Angriffe noch das Achselzuchen in den privaten Gesprächen; und ich erinnere mich an diese Umstände um so mehr, als ich eben in dieser Zeit des Rückschlages, meine Arbetein im Hertz' Laboratorium in Bonn anfing.

Hertz selbst fühlte sich seiner Sache sicher, das war nicht zu verkennen. Er war seiner Sache zu sicher — oder persönlich zu stolz — um sich in die Diskussion einzulassen.

Er zweifelte nicht, dass die fortgesetze Arbeit anderer die volle Aufklärung bringen werde. Als ich aber mich als Pratikant bei ihm meldete hatt ich das Glüch, dass er mir die zentrale und am heissesten umstrittene Erscheinung zu weiterer Untersuchnung gab — die Erscheinung, die er als elektrische Resonanz gedeutet hatte, die Erscheinung, die sein wichtigstes Hilfsmittel gewesen war auf seiner Entdeckerbahn, und die Erscheinung die künftig das zentrale Hilfsmittel der drahtlosen Telegraphie verden sollte: er stellte mir die Aufgabe diese Erscheinung womöglich quantitativ durchzuarbeiten und zu verwerten.

Die Aufgabe war nicht leicht, sie erforderte fünf Jahre von 1890 bis 1895, bis zur vollständingen Lösung, wobei ich das erste dieser Jahre bei Hertz, die weiteren 4 zu Hause verbrachte. Ich erwähne diese Arbeiten, nicht um über sie zu berichten, sondern um betönen zu können: lange ehe der junge Marconi Gelegenheit hatte, seine Arbeiten anzufangen, war ich mit seinem künftigen Arbeitsgebiet vertraut: ich weiss daher aus eigener Erfahrung was es war, in der Vor-Marconi'schen Zeit auf diesem Gebiete zu arbeiten. Und nur wer das selbst gemacht hat, weiss erst recht die Leistung zu würdigen.

Im Jahre 1896, ein Jahr nachdem ich meine Arbetein auf diesem Gebiete abgeschlossen hatte, las ich in den Zeitungen über Marconis erste Patent. Ich blieb immer noch der Skeptiker.

Es ist nicht die Gelegenheit hier auf die unzählichen technischen Schwierigkeiten der hier vorliegenden Fragen einzugehen. Ich war froh, schliesslich zur Lösung meiner wissenschaftlichen Aufgabe gekommen

zu sein. Ich gestehe aber offen, dass wenn ich gelegentlich von meiner Arbeit aufblickte, und mir phantasievolle Collegen von dem schönen Traum einer drahtlosen Telegraphie sprachen, habe ich immer den Kopf skeptisch geschüttelt.

Um so mehr muss ich aber den Marconi bewundern wegen seiner Phantasie, die ihm die unerlesslichen Konsequenzen eines eventuellen Erfolges überblicken liess; wegen seiner hierdurch geweckten Begeisterung, und wegen seines Mutes, trotz aller Sckwierigkeiten eine solche Aufgabe anzupacken. Ich bewundere diese Eigenschaften sowohl beim jungen Enthusiasten Marconi, der den Anfang machte, als auch beim reifen Manne, der seinen Weg unermüdlich fortgesetzt hat, bis zu den jetz weltumfassenden Erfolgen.

Die Folgen von Marconis Werk sind so gross, so allgemein bekannt, und so schön von dem vorhergehenden Redner entwickelt, dass ich mich nicht bei Einzelnheiten aufzuhalten brauche. Ich möchte nur hinzufügen: Mit Bezug auf die Bevölkerungzahl ist mein Land, Norvergen, das erste Seefahrerland der Welt. Was unter diesen Umständen das Radio für uns zu bedeuten hat, ist sonnenklar.

Zu unseren Seefahrern gehöhrt auch die Fischerbevölkerung an unsere Küste, vielleicht die am härtesten arbeitende Bevölkerung die es im unseren Weltteil gibt. In ihren kleinen Booten treiben sie ihre gefahrvolle Arbeit, an dem stürmischsten Küste Europas. Sie müssen diese Arbeit vornehmlich im Winter betreiben welcher zugleich die stürmischeste Jahreszeit ist. Und dazu kommt noch die Schwierigkeit der Polarnacht, hinzu. Sie werden verstehen, dass diese Leute, arm wie sie sind, doch womöglicheinen Radioempfänger für ihr kleines Boot anschaffen, um den Wettermeldungen zu folgen — und immer zu wissen: jetz geraten wir in Lebensgefahr, jetz heisst es schnellstens einen schützenden Hafen zu suchen.

Diese Leute segnen die elektrischen Wellen, die ihnen Rettung bringen, die Wellen, die Hertz der Wissenschaft und Marconi der Menschheit gab.

Kennt die Geschichte der Menschheit einen stolzeren Aufstieg als dieser — von dem bescheidenen Manuskript von Hertz zu dem an Marconis Name geknüpften Weltradioverkehr, der der Menschheit solche Dienste leistet?

Indem ich schliesse werde ich die wunderbaren Worte vorlesen, die der junge Hertz auf dem Sterbebette an seine Eltern schrieb, um sie auf das Uuvermeidliche vorzubereiten:

« Wenn mir wirklich etwas geschieht, so sollt Ihr nicht trauern, sondern sollt ein wenig stolz sein, und denken dass ich dann zu den besonders Ausgewählten gehöre, die nur kurz leben und doch genug leben ».

Auch Marconi wurde kein alter Mann. Auch Marconi bewunderen wir vor allem als den gottbegnadeten Jüngling, der mutig auf die grosse Weltaufgabe seines Schicksals losging. Und wenn er nicht jung starb, so starb er bei Zeiten, um nicht die Schwächen des Alters zu erleben. Auch er hat genug gelebt — genug für die Menschheit, die ihm ewig dankbar bleiben wird.



ACTA
Vol. XIII - N. 9
pag. 93-96

LORD E. RUTHERFORD OF NELSON

Discorso commemorativo pronunciato alla augusta presenza del S. Padre Pio XII nella Solenne Tornata Inaugurale del IV Anno Accademico il 3 dicembre 1939

da GEORGE LEMAITRE
Accademico Pontificio

Très Saint Père,

C'est pour moi un grand honneur et une lourde charge d'avoir à rendre hommage, au nom de notre Académie à la mémoire d'un de ses Membres les plus illustres: Lord Rutherford of Nelson.

Il est de ces personnalités qui dominent leur époque et dont l'œuvre a laissé une empreinte si profonde qu'ils ont cultivée, qu'ils ont renovée et, pour ainsi dire créé de toutes pièces.

Retracer l'œuvre de Rutherford ce serait raconter le développement de l'atomistique. Ce serait expliquer comment la science a pu être amenée à cette description si inattendue de la constitution de la matière où tout le mystère de l'activité physique semble s'être réfugié dans les grains minuscules: ces noyaux des atomes que Rutherford a découverts, dont il a expliqués les trasformations spontanées qui constituent le phénomène de la radioactivité et dont il a pu le premier provoquer artificiellement la desintégration.

Rutherford est né en Nouvelle Zelande le 30 août 1871 à Nelson et obtint à l'Université de son pays natal ses grades de Master of Arts et de docteur en sciences.

En 1895, il est boursier à Cambridge. Il venait d'inventer le détecteur magnétique pour ondes hertziennes; l'abileté et le sens de l'organisation qu'il montra en essayant et en perfectionnant son détecteur attira immediatement sur lui l'attention de son Maître J. J. Thomson.

Dès cette époque Rutherford commença à attaquer le grand problème qui sous une forme ou sous une autre devait l'occuper pendant plus de vingt ans: l'élucidation des phénomènes de radioactivité qui venaient d'être découverts par Henri Becquerel.

Après un séjour de trois ans à Cambridge, Rutherford fut nommé professeur au Canada, à l'Université Mc Gill de Montréal. Il en revint en 1907 pour occuper la chaire de physique à l'Université de Manchester. En 1919 il revint à Cambridge comme titulaire de la chaire Cavendish et directeur du laboratoire du même nom. Il mourut en pleine activité, des suites d'une opération le 10 octobre 1937.

C'est à Mc Gill que Rutherford trouva les lois suivant lesquelles les corps radioactifs se désintègrent en émettant rayons alfa, beta et gamma. Il découvrit les émanations: ces corps gazeux radioactifs qui conservent leurs propriétés pendant quelque temps puis deviennent inertes en laissant des dépôts actifs sur les objects solides.

Dès cette époque apparaissent les qualités maîtresses du grand expérimentateur: l'extrême audace de l'imagination, la vision de l'idée simple à laquelle personne ne pense et qui va tout clarifier, et par ailleurs, la défiance de toute spéculation vide qui planerait loin des faits sans contact évident avec la réalité.

Il savait apercevoir toute la portée d'une anomalie expérimentale et pousser son idée jusqu'à ses conséquences extrêmes.

La manière dont il découvrit l'existence des noyaux atomiques ou la façon dont il décela la transformation de l'azote en oxygène par une discussion irréfutable d'anomalies dans les nombres enregistrés par des compteurs restent pour tout étudiant de la physique un sujet d'admiration et presque de stupeur.

Dès son retour en Angleterre à Manchester d'abord, à Cambridge ensuite, le laboratoire de Rutherford devint un centre international où les physiciens de tous pays vinrent collaborer avec le maître ou se laisser pénétrer de son empreinte.

Il serait difficile de citer le nom d'un savant qui ait eu une influence comparable à la sienne; et tous ceux qui l'ont approché même de loin, qui ont assisté à ses leçons ou entendu ses rapports se sont laissés gagner par le dynamisme de cette personalité puissante où l'on découvrait de la bonté.

Le modèle de l'atome qui sert de base aux recherches actuelles est géneralement désigné sous le nom d'atome de Rutherford, puisque c'est au cours d'une féconde collaboration à Manchester que le physicien danois a distribué les électrons en orbites elliptiques autour du noyau découvert par Rutherford: telles des planètes tournant autour d'un soleil.

Sous l'impulsion de Rutherford, le Cavendish Laboratory, était devenu un centre remarquable de recherches nucléaires où l'on s'efforçait de briser le noyau atomique en le bombardant par les particules électriques lancées par des champs intenses. Après avoir délimité le mystère et posé le problème du noyau atomique, Rutherford et ses collaborateurs ont commencés à accumuler les donnés qui en préparent la solution.

En annonçant la mort de Lord Rutherford un journal scientifique a pu dire de lui que ses recherches expérimentales et son génie scientifique forment la partie principale de l'empressionante structure de la physique moderne.

Je ne puis mieux faire que de terminer par ces paroles ce modeste hommage à la mémoire de Lord Rutherford of Nelson.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 10
pag. 97-112

SU ALCUNI *PARNASSIUS APOLLO* L. DEL PARCO NAZIONALE DEL GRAN PARADISO (*)

(*Con due tavole*)

ANGELINA DE TOGNI

SVMMARIVM. — Cum prof. A. GHIGI, anno 1942, viginti octo *Parnassios apollines pedemontanos* Trti collegerit, hos Auctrix examini subiecit, animadvertens maximas inter ipsos diversitates. Eam formam (*pedem.* Trti) praeterea contulit cum *mendolensi* Dannehl et *heliophilo* Frhst.

Esamino in questa Nota una piccola collezione di *Parnassius apollo pedemontanus* Trti costituita da 23 maschi e 5 femmine raccolti dal Prof. ALESSANDRO GHIGI alla metà di agosto del 1942 in un tratto di territorio non più lungo di 6 o 7 chilometri fra Degioz e Pont della Valsavaranche, nel Parco Nazionale del Gran Paradiso, su radure prative fiancheggianti quelle strade.

La determinazione di questo *P. apollo pedemontanus* Trti fu confermata dal Dott. ATTILIO FIORI; per la nomenclatura alare mi riferisco allo schema alare generale proposto da SERGIO BEER (1).

Le variazioni individuali di questa specie sono tanto numerose e cospicue, che anche nell'ambito dei soli 28 esemplari che ho avuto in esame non si riuscirebbe a trovarne due del tutto uguali. Per questo trovo opportuno fare una sommaria descrizione di ciascuno di essi

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella riunione del 7 giugno 1949.

(1) SERGIO BEER, *Ricerche sulla morfologia dei disegni nelle ali dei papilionidi*, « Commentationes Pont. Acad. Sc. », Anno VI, vol. VI, n. 2, pag. 39.

per poter anche di ognuno individuare la forma o le forme alle quali appartengono poichè tale è la variabilità dei singoli caratteri che spesso varie forme si sovrappongono in uno stesso individuo.

N. 1 ♂: forma *subcentrica* Trti per una macchiolina rossa e talora poche squame nelle macchie nere precostali delle celle 5 e 8 e talvolta anche in quella della cella 1 ventralmente all'ala anteriore (fig. 1). In questo *apollo pedemontanus* tali macchie rosse sono sempre molto ridotte, contrariamente a quanto ho potuto constatare per *P. apollo mendolensis* Dannehl di cui posseggo 13 maschi e 7 femmine raccolti da me nell'Alta Val di Non nei pressi del Passo della Mendola, in cui le macchie rosse assumono sempre proporzioni assai maggiori. Questo stesso individuo appartiene anche alla forma *decora* Schultz per avere una macchia arancione interna alle due nere delle celle 1 e 2 dorsalmente all'ala posteriore, alla forma *cuneifer* Stauder per avere l'ocello anteriore leggermente cuneiforme, alla forma *binocularis* Bryk per la pupilla bianca in ambedue gli ocelli che appaiono qui molto estesi (fig. 2). Inoltre potrebbe essere anche ascritto alla forma *pyrophora* Stauder per avere gli ocelli anteriori caratterizzati da un miscuglio di rosso e di giallo con un effetto igneo. In Verity però non trovo, per ciò che riguarda la descrizione della forma *pyrophora*, distinzione di ocelli ma sembra che questo carattere si debba riferire tanto agli anteriori quanto ai posteriori. Questa forma inoltre è considerata dallo stesso Autore come aberrazione anzichè forma individuale semplice, perchè la annovera fra i casi di variazione estrema.

N. 2 ♂: statura minore del precedente, come pure l'estensione delle macchie nere e degli ocelli; anche la pigmentazione generale delle ali è più ridotta. Forma *subcentrica* Trti, *margopupillata* Bryk (fig. 3) per una macchia gialla interna a quella nera della cella 1 dorsalmente all'ala posteriore e *binocularis* Bryk. Inoltre presenta sia pure in misura molto minore del precedente caratteri riferibili alle forme *cuneifer* Stauder e *appendiculata* Trti = *posticelongatus* Kammel.

N. 3 ♂: forma tipica *appendiculata* Trti = *posticelongatus* Kammel per un leggero prolungamento a forma di lobo dell'ocello posteriore

(fig. 4); *binocularis* Bryk, *rosaceomaculata* Stauder per gli ocelli di color roseo (forma aberrante secondo VERITY). Sarebbe inoltre da avvicinare alla forma *tenuicincta* Vrty per avere l'ocello anteriore circondato da un anello nero assai esile. Però anche in questo caso non trovo in VERITY distinzione di ocelli per questo carattere e la forma *tenuicincta* dovrebbe quindi riferirsi tanto all'anteriore quanto al posteriore.

N. 4 ♂: statura maggiore dei precedenti. Ocelli rossi con anello nero spesso (forma *laticincta* Bryk – fig. 5) e piccole pupille bianche (*binocularis* Bryk). Forma di passaggio alla *subcentrica* Trti e alla *appendiculata* Trti = *posticelongatus* Kammel, oltre a *intertexta* Stichel = *jucundula* Stauder (fig. 6) per avere un anello chiaro arancione fra il rosso e l'anello nero degli ocelli, tranne che nell'*apollo* da me esaminato questa particolarità è visibile solo nella parte inferiore dell'ala.

N. 5 ♂: ocelli rosso vivo, l'anteriore completamente oblilaterato, il posteriore con una piccolissima pupilla bianca puntiforme. È l'unico maschio che si avvicina alla forma *expupillata* Rocci = *rubromaculata* Kammel = *depupillata* Trti, ma la forma tipica è completamente assente di pupille negli ocelli. Ha inoltre un'unica macchiolina nera anale nella cella 1 (forma *unimaculatus* Bryk, unica nella collezione – fig. 7).

N. 6 ♂; forma tipica di *quincunx* Bryk = *mnemosynoides* Trti, unica nella collezione, per la mancanza della piccola macchia nera fra la D. ed il margine anteriore dell'ala (fig. 8); forma *binocularis* Bryk per ciò che riguarda gli ocelli e *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel per gli stessi di un giallo intenso (forma aberrante secondo VERITY).

N. 7 ♂: forma tipica di *ladogensis* Bryk = *flavalbidomaculata* Stauder per gli ocelli di un giallo molto pallido e ampiamente centrati di bianco (fig. 9 – forma aberrante secondo VERITY), oltre a forma *decora* Schultz e *binocularis* Bryk.

N. 8 ♂: individuo caratteristico per gli ocelli di un rosso rubino tipico di *pedemontanus* Trti e ampiamente pupillati; forma *subcentrica* Trti e *binocularis* Bryk.

N. 9 ♂: forma *binocularis* Bryk e *rosaceomaculata* Stauder.

N. 10 ♂: forma *subcentrica* Trti, *appendiculata* Trti = *posticelongatus* Kammel, *binocularis* Bryk, *pyrophora* Stauder.

N. 11 ♂: presenta ocelli di un rosso vivo con un piccolissimo abbozzo di pupilla bianca. Forma *appendiculata* Trti = *posticelongatus* Kammel. È di piccola statura.

N. 12 ♂: forma *binocularis* Bryk, *laticincta* Bryk con ocelli anteriori di forma elittica.

N. 13 ♂: è un individuo un po' in cattivo stato. Per gli ocelli di un giallo pallidissimo l'anteriore e bianco il posteriore si potrebbe quasi ritenere forma intermedia fra *ladogensis* Bryk = *flavalbidomaculata* Stauder e *albomaculata* Muschamp = *magnopupillata* Rocci (fig. 10 - forma aberrante secondo Verity).

N. 14 ♂: individuo di piccola statura con macchie nere poco estese e in generale poco melanizzato. Forma *margopupillata* Bryk, *laticincta* Bryk, *binocularis* Bryk.

N. 15 ♂: assai più grande del precedente ma con disegno nero egualmente poco esteso e in generale poco melanizzato. Ocelli estesi specialmente il posteriore. Forma *subcentrica* Trti, *appendiculata* Trti, *laticincta* Bryk, *binocularis* Bryk, *intertexta* Stichel = *jucundula* Stauder, *pyrophora* Stauder.

N. 16 ♂: individuo di piccola statura, ocelli di un giallo molto pallido (forma *ladogensis* Bryk = *flavalbidomaculata* Stauder) centrati di bianco (forma *binocularis* Bryk), macchie anali con un puntino giallo (forma *decora* Schultz).

N. 17 ♂: macchiatura poco estesa e relativamente pigmentata. Forma *intertexta* Stichel = *jucundula* Stauder, *binocularis* Bryk e *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel.

N. 18 ♂: scarsa pigmentazione generale. Forma *subcentrica* Trti, *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel, *binocularis* Bryk e *laticincta* Bryk.

N. 19 ♂: è un individuo fra i più melanizzati. Ocelli con anello nero spesso (forma *laticincta* Bryk), rosei (forma *rosaceomaculata* Stauder) con grande pupilla il posteriore, puntiforme l'anteriore (forma *binocularis* Bryk); forma *subcentrica* Trti per le macchie rosse ventralmente all'ala.

N. 20 ♂: è un individuo in cattivo stato con ocelli di un giallo pallido e pupillati (forme *ladogensis* Bryk = *flavalbidomaculata* Stauder e *binocularis* Bryk).

N. 21 ♂: macchiatura estesa e pigmentata con grandi ocelli di un giallo intenso e ambedue pupillati (forme *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel e *binocularis* Bryk).

N. 22 ♂: forma *subcentrica* Trti, *binocularis* Bryk, *intertexta* Stichel = *jucundula* Stauder, *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel.

N. 23 ♂: è un esemplare molto in cattivo stato e d'impossibile classificazione.

N. 24 ♀: piccolo individuo molto melanizzato, macchie nere rotondeggianti ben pigmentate, ocelli rosso vivo centrati di bianco (forma *binocularis* Bryk).

N. 25 ♀: esemplare assai più grande del precedente, con grandi ocelli giallo intenso (forma *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel) pupillati (*binocularis* Bryk); inoltre forma *subcentrica* Trti e *margopupillata* Bryk.

N. 26 ♀: individuo in complesso poco melanizzato. Forma *binocularis* Bryk, *rosaceomaculata* Stauder, *appendiculata* Trti = *posticelongatus* Kammel.

N. 27 ♀: forma tipica di *graphica* Stichel, unica nella collezione, per le due pupille bianche nel grande ocello posterione (fig. 11), oltre a *subcentrica* Trti, *decora* Schultz, *cuneifer* Stauder e *flavomaculata* Deckert = *flavomaculatus* Stichel.

N. 28 ♀: individuo molto caratteristico per l'estesissima pigmentazione del fondo. Forma tipica di *fasciata* Stichel, unica nella collezione, per la fascia di squame nere che unisce le precostali con la macchia della cella 1 del margine posteriore dorsalmente all'ala anteriore e di *expupillata* Rocci = *rubromaculata* Kammel = *depupillata* Trti per la totale mancanza di pupille negli ocelli di un bel rosso rubino. È l'esemplare che accoppia due uniche forme non mai riscontrate negli altri esemplari della raccolta (fig. 12).

Una diagnosi comune a tutti gli esemplari potrebbe essere formulata nel modo seguente: individui abbastanza grandi; la lunghezza dell'ala anteriore, dal punto di inserzione all'apice, è compresa fra 35 e 40 mm. nei maschi, e fra 33 e 40 nelle femmine, con antenne fortemente clavate, corpo e zona anale molto pelosi nei maschi, nudo con addome turgido nelle femmine. Il fondo delle ali è di un bianco avorio con una macchiatura generalmente abbastanza estesa e pigmentata. La forma delle macchie nere nell'ala anteriore è per lo più rotondeggiante, qualche volta elissoidale allungata, particolarmente per quelle interne all'area mediana, o rettangolare o sfumata per quelle che si trovano nella zona extracellulare verso il margine anteriore. La fascia ialina submarginale è spesso ben marcata e sempre abbastanza lunga, arrivando fino alla Cu_2 ed oltre. Anche il bordo marginale ialino è largo con le lunule avorio fra esso e la fascia testè nominata, sempre presenti ed in generale estese.

Nell'ala posteriore gli ocelli sono abbastanza grandi, nelle femmine talora molto grandi e assai spesso di forma irregolarmente rotondeggiante; il loro colore è variabilissimo: da un giallo biancastro a rosso vivo più o meno centrati di bianco e con orlo nero esterno

più o meno ingrossato; in generale però il colore degli ocelli in questi individui è prevalentemente arancione. Nella zona anale sono quasi sempre presenti due macchie nere, talora con una macchiolina interna arancione o solo poche squame di questo colore; eccezionalmente ve ne è una sola nella cella 1, ovvero oltre alle due nelle celle 1 e 2, se ne trova una terza nella cella 3.

La parte ventrale delle ali è di un colore bianco avorio con ocelli e macchie più o meno estese e pigmentate come nella regione dorsale.

In questi *P. apollo* della collezione Ghigi, ho poi riscontrato qualche caso in cui l'ocello posteriore e ventralmente all'ala è nettamente interrotto posteriormente dalla M_2; qualche volta anche l'ocello anteriore ha l'anello nero interrotto dalla Sc. (fig. 13). Verity cita la forma *omikron apertum* Stauder definendola con queste parole « lo ha del tutto aperto lungo la nervatura che limita l'ocello anteriormente ». Non si capisce a quale dei due ocelli ciò venga riferito, ad ogni modo andrebbe bene per quello anteriore, ma non per il posteriore, essendo nel mio caso interrotto *posteriormente* anzichè *anteriormente*.

Altra particolarità che ho rilevato in qualche *P. apollo* del Gran Paradiso, è la presenza di una pupilla azzurrastra nelle macchie anali arancione orlate di nero ventralmente all'ala posteriore, tanto nei maschi quanto nelle femmine (fig. 14). In Verity non ho trovato alcun riferimento a forme come quella testè descritta; il suddetto autore nomina una *caeruleopunctata* Koschabek con squame cerulee nella macchia della cella 1 dell'ala anteriore senza precisarne la pagina ma che certamente non rientra nel mio caso, anche perchè tale forma secondo l'Autore si riferirebbe soltanto ai maschi.

Ho confrontato per questa particolarità gli esemplari di *apollo pedemontanus* del Gran Paradiso con i miei *apollo mendolensis* del Passo della Mendola e con un maschio e una femmina di *apollo heliophilus* Frhst., che il Dott. Elvezio Ghirardelli mi portò dalla Val Cannobina presso il Lago Maggiore. Negli *apollo mendolensis* la pupilla cerulea è presente molto più spesso con estensione maggiore e di una tinta assai più intensa in confronto con gli esemplari *pedemontanus*; in *heliophilus* invece è addirittura bianca o di una tinta indefinibile che non si qualificherebbe certo per azzurra.

È assai notevole quanto evidente ed interessante la diversità dei caratteri generali di queste tre « forme locali » di *apollo*.

Pedemontanus appare la più esile con macchie nere di media estensione, pigmentazione mai molto intensa, fuorchè in qualche femmina; ocelli non molto estesi con anello nero non molto spesso, tinte tenui nella maggior parte variabili da giallo ad arancione, pupille bianche quasi sempre presenti ma non molto grandi.

Mendolensis (fig. 15) appare delle tre la « forma locale » più robusta non tanto per la statura (42 mm. di lunghezza d'ala anteriore) quanto per il disegno molto esteso, marcatissimo, ben pigmentato e a contorno netto; ocelli molto estesi rossi o arancione con grosso anello nero. Una delle femmine presenta una deformità nell'ala posteriore sinistra: manca buona parte delle celle 8 e 7 perchè il margine anteriore dell'ala anzichè convesso è rettilineo e nella cella 6 vi è una nervatura addizionale che decorre in detta cella per circa la metà della sua lunghezza.

Heliophilus (fig. 16) è la più grande misurando una lunghezza alare di circa 45 mm., colore di fondo più niveo specialmente nel maschio che ha un corpo ricoperto di folti e lunghi peli grigio-chiaro, macchiatura un po' estesa e meno pigmentata, ocelli più piccoli con orlo nero meno spesso; in generale la pigmentazione è scarsa e ad ogni modo minore di *pedemontanus* e di *mendolensis*.

Dallo studio compiuto su questo *P. apollo* trovo che la zona esplorata dal Ghigi è abitata da una popolazione che si può considerare come formata da individui aventi caratteri abbastanza propri e distinti dalle altre forme viventi in altre località della Penisola, sia per il colore del fondo delle ali, sia per l'estensione e forma del disegno, sia per la statura dei singoli individui e i caratteri particolari delle macchie ocellari rosse delle ali posteriori, particolarità queste che permettono appunto di distinguere detti Parnassi in un gruppo a sè, diverso da tutte le altre popolazioni viventi sia pure in località molto vicine.

Riguardo alle varie differenze individuali che ho riconosciuto in seno alla popolazione mi risulta, anche a quanto riferiscono vari Autori, che pur non essendo forme esclusive di *pedemontanus*, tuttavia si ritrovano particolarmente in detta forma e sono diverse nel loro insieme dalle altre che solitamente si ritrovano in altri gruppi di Parnassi.

Un particolare degno di nota è che: nella descrizione dei caratteri che Verity fa per le varie « forme locali » delle Alpi e dell'Appennino, trovo che il colore delle macchie ocellari in *P. apollo pedemontanus* dovrebbe essere di un « rosso scuro » o di un « rosso rubino » a quanto viene riferito anche da Turati e dallo stesso Fruhstorfer, tuttavia negli individui da me esaminati il colore predominante è il giallo e il giallo rosa e solo in pochi casi ho riscontrato il rosso vivo. Di fronte al numero esiguo dei miei esemplari sta una straordinaria variabilità delle popolazioni di *Parnassius apollo,* compresa quella da me studiata, a seconda delle diverse altitudini alle quali tali farfalle vivono, a seconda del grado di umidità, dell'esposizione al sole della zona abitata da queste colonie di *P. apollo*, talora molto esigue e molto ristrette. Spesso infatti sono rimaste a moltiplicarsi fra loro per circostanze favorevoli, onde basta una balza o un corso d'acqua per limitarne, per qualche tratto, l'area di riproduzione e di distribuzione, salvo ritrovare poco più in là su altri pendii e con un aspetto particolare gli stessi modelli. Forse si potrebbe anche interpretare la maggior frequenza del colore giallo nei Parnassi da me studiati, ammettendo una leggera desquamazione delle ali per aver gli individui molto volato (qualche esemplare infatti non ha un aspetto freschissimo), ovvero ad uno scolorimento del pigmento rosso molto labile, dovuto ai raggi del sole, forse particolarmente vivi su quel pendio: trovo in Verity una simile interpretazione per il colore giallo degli ocelli di *apollo pumilus* Stichel della Calabria.

Nonostante però l'estrema variabilità di questo *P. apollo*, detta variabilità è tuttavia sempre compresa fra limiti ben determinati, per cui mi è stato sempre possibile per ognuno dei caratteri considerati, ordinare i singoli individui in serie che comprendono tutti i modi di manifestarsi di ogni singolo carattere, dalle forme nelle quali esso è meno accentuato a quelle che lo presentano sviluppato al massimo grado. Va inoltre considerato che la costanza di certa forma di disegno, la prevalenza di determinate tinte, il grado di melanismo, la statura degli individui ecc. sono caratteri variabili ma entro limiti molto ristretti anche nei soli 28 esemplari da me esaminati, tanto che essi possono considerarsi come appartenenti ad una popolazione diversa da tutte le forme descritte per l'Italia e che io confermerei trattarsi di una forma particolare: *pedemontanus* Turati.

Considerando quanto ho esposto, in rapporto alle recenti vedute sulla genetica di popolazioni, mi sembra che si possa giungere alle conclusioni seguenti:

1° Il *Parnassius apollo* L. appare come una specie cui l' isolamento geografico nelle singole vallate montane (alpine, appenniniche, ecc.) ha consentito di selezionare razze e sottorazze abbastanza omogenee e al tempo stesso costituzionalmente distinte l'una dall'altra.

2° Tale possibilità è legata ad uno stato di notevole mutabilità che si riscontra per gli individui dello stesso biotipo, come quella che abbiamo osservato nella popolazione della Valsavaranche.

3° La possibilità di distinguere le mutazioni dalle somazioni, indubbiamente numerose in ambienti assai vari per la diversa esposizione ai raggi solari e conseguentemente per la maggiore o minore durata dell'azione del freddo sulle crisalidi, in territori ristretti e variamente esposti, è subordinata ad un gran numero di osservazioni e ad una accurata sperimentazione.

4° Se non siamo in errore pensiamo che il *Parnassius apollo* L. rappresenti un materiale ottimo per lo studio di genetica di popolazioni.

BIBLIOGRAFIA

MARIANI M., *Novità di lepidotterologia in Sicilia.* « Boll. Soc. Ent. It. », LXII, 1930.

ROCCI U., *Il* Parnassius apollo *L. sull'Appennino ligure.* « Boll. Soc. Ent. It. », LXIV, 1932.

TURATI E., *Spizzichi di lepidotterologia.* III. « Boll. Soc. Ent. It. », LXIV, 1932.

— *Spizzichi di lepidotterologia.* IV. « Boll. Soc. Ent. It. », LXV, 1933.

— *Cinque anni di ricerche nell'Appennino modenese.* « Atti Soc. It. Sc. Nat. », LXII, 1923.

VERITY R., *Contributo allo studio della variazione nei Lepidotteri tratto principalmente da materiale di Toscana, delle Marche e di Calabria.* « Boll. Soc. Ent. It. », XLV, 1913.

— *Le farfalle diurne d'Italia,* III Papilionidae e Pieridae. Marzocco, Firenze, 1947.

Pedemontanus appare la più esile con macchie nere di media estensione, pigmentazione mai molto intensa, fuorchè in qualche femmina; ocelli non molto estesi con anello nero non molto spesso, tinte tenui nella maggior parte variabili da giallo ad arancione, pupille bianche quasi sempre presenti ma non molto grandi.

Mendolensis (fig. 15) appare delle tre la «forma locale» più robusta non tanto per la statura (42 mm. di lunghezza d'ala anteriore) quanto per il disegno molto esteso, marcatissimo, ben pigmentato e a contorno netto; ocelli molto estesi rossi o arancione con grosso anello nero. Una delle femmine presenta una deformità nell'ala posteriore sinistra: manca buona parte delle celle 8 e 7 perchè il margine anteriore dell'ala anzichè convesso è rettilineo e nella cella 6 vi è una nervatura addizionale che decorre in detta cella per circa la metà della sua lunghezza.

Heliophilus (fig. 16) è la più grande misurando una lunghezza alare di circa 45 mm., colore di fondo più niveo specialmente nel maschio che ha un corpo ricoperto di folti e lunghi peli grigio-chiaro, macchiatura un po' estesa e meno pigmentata, ocelli più piccoli con orlo nero meno spesso; in generale la pigmentazione è scarsa e ad ogni modo minore di *pedemontanus* e di *mendolensis*.

Dallo studio compiuto su questo *P. apollo* trovo che la zona esplorata dal Ghigi è abitata da una popolazione che si può considerare come formata da individui aventi caratteri abbastanza propri e distinti dalle altre forme viventi in altre località della Penisola, sia per il colore del fondo delle ali, sia per l'estensione e forma del disegno, sia per la statura dei singoli individui e i caratteri particolari delle macchie ocellari rosse delle ali posteriori, particolarità queste che permettono appunto di distinguere detti Parnassi in un gruppo a sè, diverso da tutte le altre popolazioni viventi sia pure in località molto vicine.

Riguardo alle varie differenze individuali che ho riconosciuto in seno alla popolazione mi risulta, anche a quanto riferiscono vari Autori, che pur non essendo forme esclusive di *pedemontanus*, tuttavia si ritrovano particolarmente in detta forma e sono diverse nel loro insieme dalle altre che solitamente si ritrovano in altri gruppi di Parnassi.

Un particolare degno di nota è che: nella descrizione dei caratteri che Verity fa per le varie « forme locali » delle Alpi e dell'Appennino, trovo che il colore delle macchie ocellari in *P. apollo pedemontanus* dovrebbe essere di un « rosso scuro » o di un « rosso rubino » a quanto viene riferito anche da Turati e dallo stesso Fruhstorfer, tuttavia negli individui da me esaminati il colore predominante è il giallo e il giallo rosa e solo in pochi casi ho riscontrato il rosso vivo. Di fronte al numero esiguo dei miei esemplari sta una straordinaria variabilità delle popolazioni di *Parnassius apollo,* compresa quella da me studiata, a seconda delle diverse altitudini alle quali tali farfalle vivono, a seconda del grado di umidità, dell'esposizione al sole della zona abitata da queste colonie di *P. apollo,* talora molto esigue e molto ristrette. Spesso infatti sono rimaste a moltiplicarsi fra loro per circostanze favorevoli, onde basta una balza o un corso d'acqua per limitarne, per qualche tratto, l'area di riproduzione e di distribuzione, salvo ritrovare poco più in là su altri pendii e con un aspetto particolare gli stessi modelli. Forse si potrebbe anche interpretare la maggior frequenza del colore giallo nei Parnassi da me studiati, ammettendo una leggera desquamazione delle ali per aver gli individui molto volato (qualche esemplare infatti non ha un aspetto freschissimo), ovvero ad uno scolorimento del pigmento rosso molto labile, dovuto ai raggi del sole, forse particolarmente vivi su quel pendio: trovo in Verity una simile interpretazione per il colore giallo degli ocelli di *apollo pumilus* Stichel della Calabria.

Nonostante però l'estrema variabilità di questo *P. apollo*, detta variabilità è tuttavia sempre compresa fra limiti ben determinati, per cui mi è stato sempre possibile per ognuno dei caratteri considerati, ordinare i singoli individui in serie che comprendono tutti i modi di manifestarsi di ogni singolo carattere, dalle forme nelle quali esso è meno accentuato a quelle che lo presentano sviluppato al massimo grado. Va inoltre considerato che la costanza di certa forma di disegno, la prevalenza di determinate tinte, il grado di melanismo, la statura degli individui ecc. sono caratteri variabili ma entro limiti molto ristretti anche nei soli 28 esemplari da me esaminati, tanto che essi possono considerarsi come appartenenti ad una popolazione diversa da tutte le forme descritte per l'Italia e che io confermerei trattarsi di una forma particolare: *pedemontanus* Turati.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I

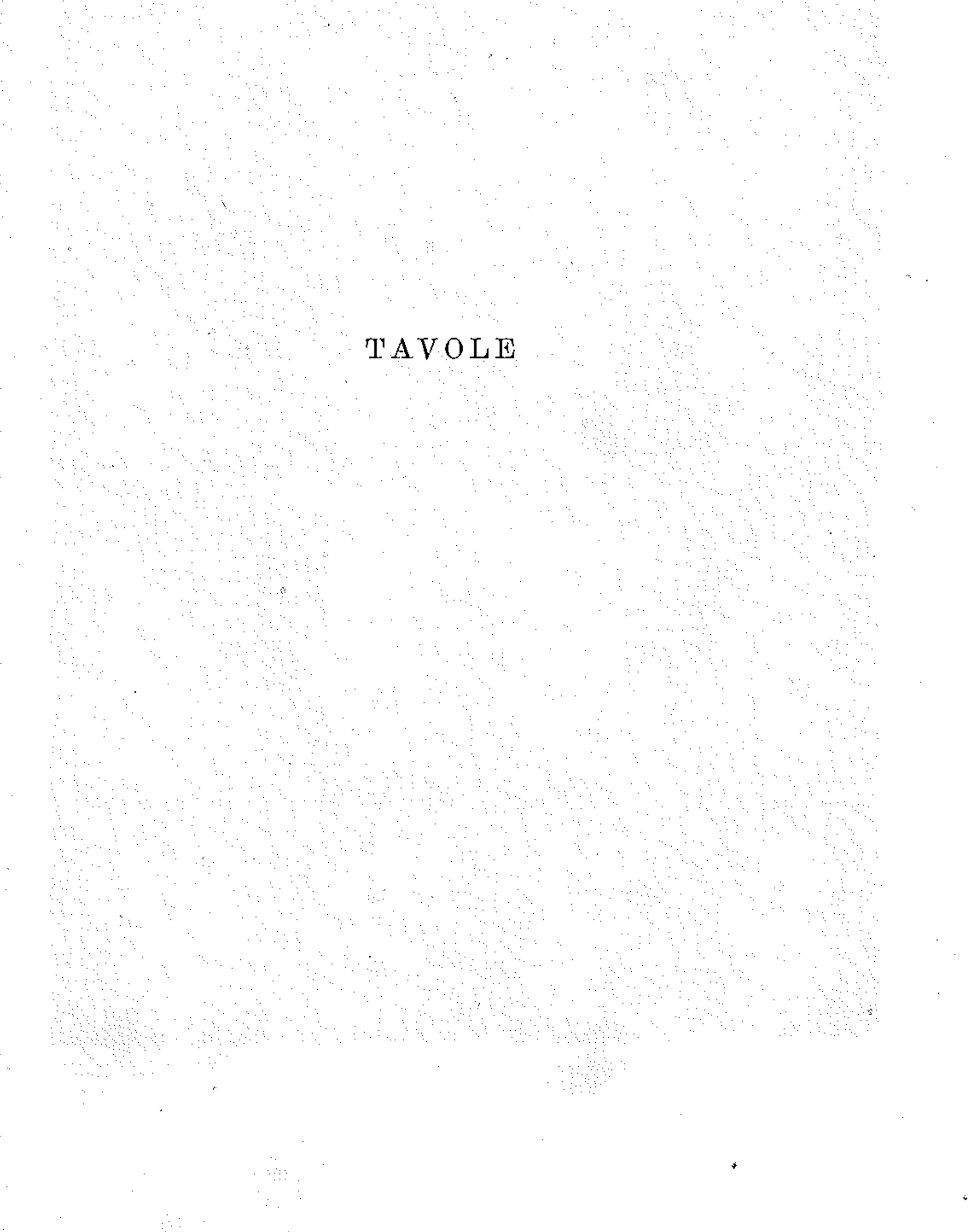
Fig. 1. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 1 dalla parte ventrale.
» 2. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Lo stesso esempl. dalla parte dorsale.
» 3. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 2 dalla parte dorsale.
» 4. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 3 dalla parte dorsale.
» 5. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 4 dalla parte dorsale.
» 6. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Lo stesso esempl. dalla parte ventrale.
» 7. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 5 dalla parte dorsale.
» 8. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 6 dalla parte dorsale.

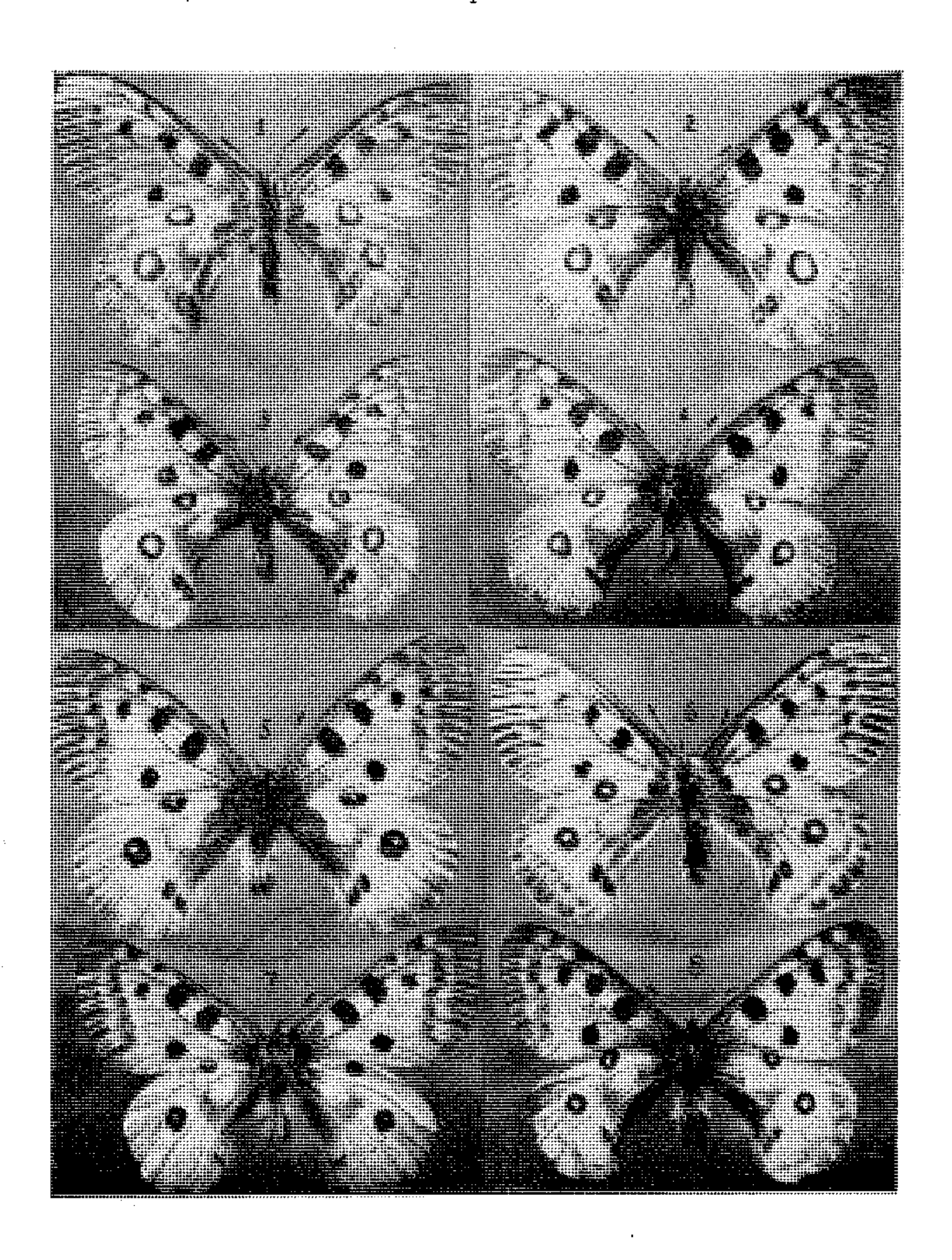
TAVOLA II

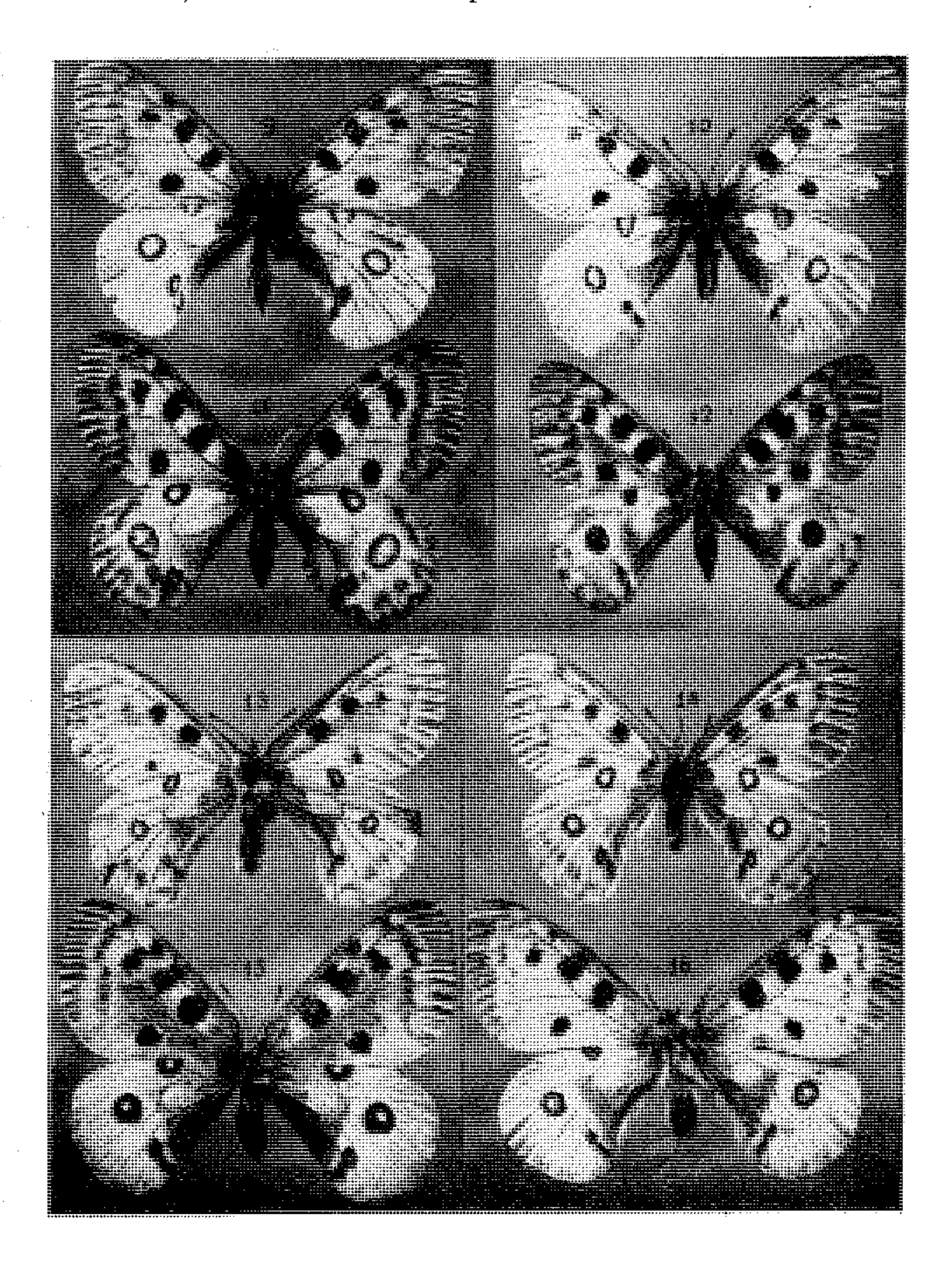
Fig. 9. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 7 dalla parte dorsale.
» 10. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 13 dalla parte dorsale.
» 11. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♀ Esemplare N. 27 dalla parte dorsale.
» 12. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♀ Esemplare N. 28 dalla parte dorsale.
» 13. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 6 dalla parte ventrale.
» 14. — *P. apollo pedemontanus* Trti ♂ Esemplare N. 8 dalla parte ventrale.
» 15. — *P. apollo mendolensis* Dannehl ♂ Esemplare dalla parte dorsale.
» 16. — *P. apollo heliophilus* Frhst. ♂ Esemplare dalla parte dorsale.

I numeri degli esemplari si riferiscono al numero col quale gli stessi sono contraddistinti nel testo.

TAVOLE









PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 11
pag. 113-128

SUI SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARI E SUI LORO AGGIUNTI DI LAGRANGE (*)

NOTA SECONDA

ARMANDO CHIELLINI

SVMMARIVM. — Postquam nonnulla de linearium systematum transformationibus generatim Auctor disseruit, determinat invariantia differentialia systematis adiuncti Lagrangensis (quod nempe certo systemati adiunctum sit), et statuit quid opus sit, ut certum systema lineare cum suo adiuncto omnino congruat. Praeterea tractat de lineari systemate ad formam reductam alternam reducendo, ostendens maximam quae adest diversitatem inter secundae classis et cuiuslibet classis systemata.

§ 1. – TRASFORMAZIONI DEI SISTEMI LINEARI. FORME RIDOTTE.

1. – In un precedente lavoro [1] abbiamo stabilita la teoria invariantiva dei sistemi lineari, di classe due, cioè dei sistemi della forma

$$[a] \qquad \begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) = 0 \ ; \end{cases}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi nella Riunione del 7 giugno 1949.

(1) CHIELLINI, *La teoria invariantiva dei sistemi differenziali lineari di due equazioni di ordine qualunque.* «Pontificia Academia Scientiarum», 1949, Vol. XII.

ma una semplice osservazione ci fa vedere che tale teoria è estendibile senz'altro ai sistemi di classe qualunque

$$[\mathrm{I}] \quad \begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) + \dots + A_{1m}(y_m) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) + \dots + A_{2m}(y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}(y_1) + A_{m2}(y_2) + \dots + A_{mm}(y_m) = 0 \end{cases}$$

Infatti gli invarianti differenziali del sistema $[a]$ si distribuiscono in due gruppi, quello degli invarianti che abbiamo indicato con θ_k, relativi ai polinomi differenziali A_{11}, A_{22} e quello degli invarianti ϑ_k relativi ai polinomi differenziali A_{12}, A_{21}; gli invarianti θ_k coincidono con quelli delle equazioni differenziali ordinarie, mentre gli invarianti ϑ_k sono formati (nella stessa maniera) esclusivamente con i coefficienti di un solo polinomio differenziale A_{ih}. Ne segue allora che nel caso generale del sistema [I] avremo gli invarianti

$$\theta_k^{(1)},\ \theta_k^{(2)}, \dots, \theta_k^{(m)}$$

relativi ai polinomi A_{ii} e gli invarianti

$$\vartheta_k^{(1)},\ \vartheta_k^{(2)}, \dots, \vartheta_k^{(r)} \qquad [r = m(n-1)]$$

formati ciascuno, nella stessa maniera, con i coefficienti di uno solo dei polinomi $A_{ih} (i \neq k)$.

2. – Ciò premesso, scriviamo per disteso il sistema [I], mettendo in evidenza i coefficienti numerici, come si usa sempre fare nella teoria degli invarianti differenziali

$$[\mathrm{I}_1] \quad \begin{cases} y_1^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{11k} y_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{12k} y_2^{(n-k)} + \dots + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{1mk} y_m^{(n-k)} = 0 \\ y_2^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{21k} y_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{22k} y_2^{(n-k)} + \dots + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{2mk} y_m^{(n-k)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{m1k} y_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{m2k} y_2^{(n-k)} + \dots + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} a_{mmk} y_m^{(n-k)} = 0 \end{cases}$$

Secondo una denominazione ormai classica, si dice che il sistema ha la *forma ridotta* se

$$a_{111} = a_{221} = a_{331} = \dots = a_{mm1} = 0 \cdot$$

e si vede immediatamente che è sempre possibile, mediante sole operazioni di derivazione, ridurci a tale forma, mediante il cambiamento di funzioni incognite definito dalle relazioni

$$y_i = \lambda_i Y_i \ ,$$

con le λ_i soddisfacenti alle condizioni

[2] $$n \lambda'_i + a_{ii1} \lambda_i = 0$$

Consideriamo ora il sistema aggiunto del sistema $[I_1]$ ed indichiamone con α_{ikl} i suoi coefficienti; avremo evidentemente (vedi nota 1 pag. 113).

$$\alpha_{ii1} = - a_{ii1}$$

e quindi per ridurre alla forma ridotta il sistema aggiunto, dovremo eseguire il cambiamento di funzioni $\eta_i = \Lambda_i H_i$ con le Λ_i definite dalle equazioni $n \Lambda'_i + \alpha_{ii1} \Lambda_i = 0$, cioè da

$[2_1]$ $$n \Lambda'_i - a_{ii1} \Lambda_i = 0$$

Confrontando [2] e $[2_1]$ segue senz'altro

$$\Lambda_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

ed allora, tenendo presenti i risultati fondamentali della teoria degli invarianti differenziali [1], possiamo senz'altro enunciare il

Teorema I: *Gli invarianti del sistema aggiunto sono anche invarianti del sistema dato e viceversa.*

---

[1] Vedi Wilczynski: *Differential geometry of curves and ruled surfaces* (cap. V) - Teubner. Lipsia.

Come *Corollario* immediato di ciò segue poi:

La riduzione alla forma ridotta si effettua simultaneamente per un sistema differenziale [I] *e per il suo aggiunto*

3. – Un'altra trasformazione assai importante sui sistemi lineari e che dà luogo ad un risultato notevole per le applicazioni è quella che conduce alla così detta *forma semicanonica*, cioè alla forma in cui sono nulli tutti i coefficienti delle derivate $(n-1)^{me}$; per poter ottenere tale forma, eseguiamo sul sistema $[I_1]$ il cambiamento di funzioni incognite definito da

$$[3] \qquad y_i = \sum_1^m{}_k \lambda_{ik} Y_k \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

con il determinante

$$[4] \qquad \Delta = \| \lambda_{ik}(x) \| \neq 0 \; ;$$

introducendo le [3] in $[I_1]$ ed ordinando, si vede che per ottener la forma semicanonica, occorre che siano soddisfatte le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda'_{1i} + a_{111} \lambda_{1i} + a_{121} \lambda_{2i} + \dots + a_{1m1} \lambda_{mi} = 0 \\ \lambda'_{2i} + a_{211} \lambda_{1i} + a_{221} \lambda_{2i} + \dots + a_{2m1} \lambda_{mi} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda'_{mi} + a_{m11} \lambda_{1i} + a_{m21} \lambda_{2i} + \dots + a_{mm1} \lambda_{mi} = 0 \end{array} \right.$$

da cui risulta che per trasformare il sistema dato in un altro di forma semicanonica, dobbiamo prendere per le m funzioni λ di ogni colonna del determinante [4] cioè per le m m^{plo}

$$(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{mi}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

m soluzioni costituenti un sistema fondamentale di soluzioni del sistema differenziale lineare del primo ordine e di classe m

$$[5] \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta'_1 + a_{111} \theta_1 + a_{121} \theta_2 + \dots + a_{1m1} \theta_m = 0 \\ \theta'_2 + a_{211} \theta_1 + a_{221} \theta_2 + \dots + a_{2m1} \theta_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta'_m + a_{m11} \theta_1 + a_{m21} \theta_2 + \dots + a_{mm1} \theta_m = 0 \; . \end{array} \right.$$

Analogamente, volendo ridurre alla forma semicanonica il sistema aggiunto, mediante la sostituzione di funzioni incognite

$$\eta_i = \sum_1^m {}_k \Lambda_{ik} H_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

con $\|\Lambda_{ik}(x)\| \neq 0$, dovremo prendere per m m^{ple}

$$(\Lambda_{1i}, \ \Lambda_{2i}, \ldots, \Lambda_{mi}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

m soluzioni costituenti un sistema fondamentale di soluzioni del sistema differenziale lineare del primo ordine e di classe m

$$[6] \qquad \begin{cases} \tau'_1 + \alpha_{111}\tau_1 + \alpha_{121}\tau_2 + \ldots + \alpha_{1m1}\tau_m = 0 \\ \tau'_2 + \alpha_{211}\tau_1 + \alpha_{221}\tau_2 + \ldots + \alpha_{2m1}\tau_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau'_m + \alpha_{m11}\tau_1 + \alpha_{m21}\tau_2 + \ldots + \alpha_{mm1}\tau_m = 0 \, , \end{cases}$$

dove α_{ikl} indicano i coefficienti del sistema aggiunto; ma

$$\alpha_{ik1} = - a_{ki1}$$

e quindi si deduce che il sistema [6] è aggiunto del sistema [5] sia secondo la nostra definizione generale di sistema aggiunto, sia secondo quella particolare che si usa dare per i soli sistemi lineari del primo ordine (¹); possiamo quindi enunciare il

TEOREMA II: *La riduzione di un sistema lineare di ordine e di classe qualunque alla forma semicanonica e quella analoga del suo sistema aggiunto dipendono dalla risoluzione di due sistemi lineari del primo ordine, aggiunti uno dell'altro.*

Ne segue come conseguenza immediata che *se il sistema dato è di forma semicanonica lo è anche il suo sistema aggiunto.*

(¹) Vedi per es. LAGRANGE: *Acta Mathematica*-tomo 48 (1926).

§ 2. – Gli invarianti fondamentali del sistema aggiunto

Per l'osservazione fatta al principio del paragrafo precedente, possiamo senz'altro limitarci al caso di un sistema di classe due, cioè al sistema

$$\begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) \equiv y_1^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} p_{1k}\, y_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} q_{1k}\, y_2^{(n-k)} = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) \equiv y_2^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} p_{2k}\, y_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} q_{2k}\, y_2^{(n-k)} = 0 \end{cases}$$

Gli invarianti di questo sistema (¹) si distinguono, come si è già accennato, in quelli $\theta_k^{(1)}$, $\theta_k^{(2)}$ relativi ai polinomi differenziali A_{11}, A_{22} (che non sono altro che quelli di un'ordinaria equazione differenziale lineare dell'ordine n) e in quelli $\vartheta_k^{(1)}$, $\vartheta_k^{(2)}$ relativi ai polinomi differenziali A_{12}, A_{21}, le cui espressioni esplicite sono (per A_{12})

$$[7]\begin{cases} \vartheta_1^{(1)} = q_{11} \\ \vartheta_2^{(1)} = q_{12} - q'_{11} \\ \vartheta_4^{(1)} = q_{11} q_{13} - \frac{n+9}{4} q_{11} q'_{12} - \frac{n-3}{4} q_{11} q''_{11} + \frac{n-3}{4} (q'_{11})^2 + \frac{n+3}{2} q'_{11} q_{12} \\ \vartheta_6^{(1)} = q^2_{11} \left\{ q_{14} - \frac{2(n+2)}{n+1} (q'_{13} - q''_{12}) \right\} + \frac{2(n+2)}{n+1} q_{11} \left\{ q'_{11} q_{13} - 2 q'_{11} q'_{12} - q''_{11} q_{12} \right\} + \\ \qquad + \frac{4(n+2)}{n+1} q_{12} (q'_{12})^2 - \frac{2(n-1)}{n+1} q_{12} (q_{11} q_{13} - q^2_{12}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

e analogamente per i $\vartheta_k^{(2)}$ relativi a A_{21} (basta scambiare il primo indice 1 con 2 e la lettera q con la lettera p (²)).

(¹) Vedi Chiellini *loc. cit.*

(²) Veramente nel nostro citato lavoro si è stabilita la forma esplicita solamente per gli invarianti ϑ_1, ϑ_2, ϑ_4; quella di ϑ_6 si è determinata ora, perchè solo ora interessa. Il procedimento per ottenerla è naturalmente lo stesso di quello stabilito nel lavoro citato. Osserviamo qui esplicitamente che tutti gli invarianti ϑ_k, eccetto il primo ϑ_1, sono di peso pari ed inoltre che in ogni invariante espresso mediante i rapporti $\frac{q_{1k}}{q_{11}}$ $\left(\text{o } \frac{p_{2k}}{p_{21}}\right)$ tutti i termini, esclusi quelli della parte lineare, devono contenere il rapporto $\frac{q_{12}}{q_{11}}$ $\left(\text{o } \frac{p_{22}}{p_{21}}\right)$ come fattore.

Indicando per brevità con le lettere maiuscole i coefficienti del sistema aggiunto, cioè scrivendo tale sistema sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}_{11}^{(0)}(\eta_1) - \mathrm{A}_{21}^{(0)}(\eta_2) \equiv \eta_1^{(n)} + \sum_1^n{}_k\binom{n}{k}\mathrm{P}_{1k}\eta_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k\binom{n}{k}\mathrm{Q}_{1k}\eta_2^{(n-k)} = 0 \\ -&\mathrm{A}_{12}^{(0)}(\eta_1) + \mathrm{A}_{22}^{(0)}(\eta_2) \equiv \eta_2^{(n)} + \sum_1^n{}_k\binom{n}{k}\mathrm{P}_{2k}\eta_1^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k\binom{n}{k}\mathrm{Q}_{2k}\eta_2^{(n-k)} = 0 \end{aligned}\right.$$

si trova senz'altro

$$[8] \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}_{12} &= p_{12} \\ \mathrm{P}_{13} &= 3p'_{12} - p_{13} \\ \mathrm{P}_{14} &= 6p''_{12} - 4p'_{13} + p_{14} \\ \mathrm{P}_{15} &= 10p'''_{12} - 10p''_{13} + 5p'_{14} - p_{15} \\ \mathrm{P}_{16} &= \binom{6}{2}p^{\mathrm{IV}}_{12} - \binom{0}{3}p'''_{13} + \binom{6}{2}p''_{14} - \binom{6}{1}p'_{15} + p_{16} \end{aligned}\right.$$

$$[8_1] \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Q}_{11} &= -p_{21} \\ \mathrm{Q}_{12} &= -2p'_{21} + p_{22} \\ \mathrm{Q}_{13} &= -3p''_{21} + 3p'_{22} - p_{23} \\ \mathrm{Q}_{14} &= -4p'''_{21} + 6p''_{22} - 4p'_{23} + p_{24} \\ \mathrm{Q}_{15} &= -5p^{\mathrm{IV}}_{21} + 10p'''_{22} - 10p''_{23} + 5p'_{24} - p_{25} \\ \mathrm{Q}_{16} &= -\binom{6}{1}p^{\mathrm{V}}_{21} + \binom{6}{2}p^{\mathrm{IV}}_{22} - \binom{6}{3}p'''_{23} + \binom{6}{2}p''_{24} - \binom{6}{1}p'_{25} + p_{26} \end{aligned}\right.$$

ed espressioni analoghe per P_{2k} e Q_{2k}.

5. – Ciò premesso, andiamo a calcolarci gli invarianti differenziali del sistema aggiunto, che indicheremo con

$$\theta_k^{(1,0)}\ , \qquad \theta_k^{(2,0)}$$

se si tratta di quelli relativi ai coefficienti P_{1k} e Q_{2k} e con

$$\vartheta_k^{(1,0)}\ , \qquad \vartheta_k^{(2,0)}$$

se si tratta di quelli relativi ai coefficienti Q_{1k} e P_{2k}. Per ciò che si è precedentemente osservato, gli invarianti $\theta_k^{(i,0)}$ non sono altro che

quelli relativi ad una equazione aggiunta e quindi in base al classico Teorema di BRIOSCHI-BURGATTI possiamo senz'altro concludere che gli invarianti $\theta_k^{(i,0)}$, di peso pari, coincidono con i corrispondenti invarianti $\theta_k^{(i)}$ e che quelli di peso dispari sono eguali ed opposti ai corrispondenti invarianti $\theta_k^{(i)}$, cioè che

$$\theta_{2k}^{(i,0)} = \theta_{2k}^{(i)} \;;\quad \theta_{2k+1}^{(i,0)} = -\,\theta_{2k+1}^{(i)} \qquad (i = 1, 2)$$

6. – Restano ora da calcolare gli invarianti $\vartheta_k^{(i,0)}$ relativi ai polinomi differenziali $-A_{21}^{(0)}$, $-A_{12}^{(0)}$; a questo scopo dovremo introdurre le [8] e [8_1] nelle [7] (che naturalmente immagineremo scritte con le lettere maiuscole) ed avremo senz'altro

[9] $$\vartheta_1^{(1,0)} = -\,\vartheta_1^{(2)} \;; \qquad \vartheta_1^{(2,0)} = -\,\vartheta_1^{(1)}$$

[10] $$\vartheta_2^{(1,0)} = -\,\vartheta_2^{(2)} \;; \qquad \vartheta_2^{(2,0)} = -\,\vartheta_2^{(1)}$$

[11] $$\vartheta_4^{(1,0)} = \vartheta_4^{(2)} + \frac{n+3}{4}\vartheta_1^{(2)}\{\vartheta_2^{(2)}\}' - (n+3)\,\vartheta_2^{(2)}\{\vartheta_1^{(2)}\}';$$

$$\vartheta_4^{(2,0)} = \vartheta_4^{(1)} + \frac{n+3}{4}\vartheta_1^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}' - (n+3)\,\vartheta_2^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}'$$

Il calcolo dopo ciò diventa rapidamente faticoso; per calcolarci $\vartheta_6^{(1,0)}$ converrà da prima ricavarci i varii coefficienti p, q per mezzo degli invarianti $\vartheta^{(i')}$ ottenendo le espressioni

$$q_{11} = \vartheta_1^{(1)},\ q_{12} = \vartheta_2^{(1)} + \{\vartheta_1^{(1)}\}',\ q_{11}q_{13} = \vartheta_4^{(1)} + \frac{(n+9)}{4}\vartheta_1^{(1)}\{\vartheta_2^{(1)}\}' - \frac{(n+3)}{2}\vartheta_2^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}' + \frac{(n+3)}{2}\vartheta_1^{(1)}\{\vartheta_1^{(1)}\}'' - \frac{3(n+1)}{4}\left[\{\vartheta_1^{(1)}\}'\right]^2$$

$$p_{21} = \vartheta_1^{(2)},\ p_{22} = \vartheta_2^{(2)} + \{\vartheta_1^{(2)}\}',\ p_{21}p_{23} = \vartheta_4^{(2)} + \frac{n+9}{4}\vartheta_1^{(2)}\{\vartheta_2^{(2)}\}' - \frac{n+3}{2}\vartheta_2^{(2)}\{\vartheta_2^{(2)}\}' + \frac{n+3}{2}\vartheta_1^{(2)}\{\vartheta_1^{(2)}\}'' - \frac{3(n+1)}{4}\left[\{\vartheta_1^{(2)}\}'\right]^2$$

dopo di che, con un procedimento assai laborioso si ottiene

$$[12]\qquad \vartheta_6^{(1,0)}=\vartheta_6^{(2)}-\frac{16}{n+1}\}\vartheta_1^{(1)}\{'\vartheta_4^{(2)}+\frac{4}{n+1}\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_4^{(2)}\{'+\frac{n+3}{n+1}\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_2^{(2)}\{''+$$
$$+\frac{2(n+3)}{n+1}\left[\vartheta_1^{(2)}\right]^2\}\vartheta_1^{(2)}\{'''-\frac{12(n-1)}{n+1}\left[\vartheta_2^{(2)}\right]^2\}\vartheta_1^{(2)}\{'+\frac{8(n+3)}{n+1}\vartheta_2^{(2)}\left[\}\vartheta_1^{(2)}\{'\right]^2+$$
$$+\frac{4(n-3)}{n+1}\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(2)}\}\vartheta_2^{(2)}\{'-\frac{7(n+3)}{n+1}\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{'\}\vartheta_2^{(2)}\{'-\frac{2(n+3)}{n+1}\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{''$$

e analogamente per $\vartheta_6^{(2,0)}$.

Le espressioni così trovate sono sufficienti per il nostro scopo.

Osserviamo subito esplicitamente che le espressioni ottenute per i $\vartheta^{(i,0)}$ confermano pienamente il teorema I° e cioè che gli invarianti del sistema dato lo sono anche del sistema aggiunto e viceversa.

§ 3. – I sistemi autoaggiunti. Loro caratterizzazione invariantiva.

7. – *Definizione: Chiamasi autoaggiunto un sistema differenziale lineare che coincide con il proprio aggiunto.*

In base a questa definizione, perchè un sistema risulti autoaggiunto, occorre evidentemente che si abbia

$$\begin{cases} [13] & A_{11}(y_1) \equiv A_{11}^{(0)}(\eta_1)\ , \quad A_{22}(y_2) \equiv A_{22}^{(0)}(\eta_2) \\ [14] & A_{12}(y_2) \equiv -A_{21}^{(0)}(\eta_2)\ , \quad A_{21}(y_1) \equiv -A_{12}^{(0)}(\eta_1) \end{cases}$$

In base al citato teorema di Burgatti-Brioschi, affinchè siano soddisfatte la [13], occorre e basta che gli invarianti $\theta^{(i)}$ di peso dispari si annullino, cioè che si abbia $\theta_{2k+1}^{(i)}=0$, mentre perchè siano soddisfatte le [14] dovrà aversi

$$[15]\qquad \vartheta_k^{(1,0)}=\vartheta_k^{(1)}\ , \qquad \vartheta_k^{(2,0)}=\vartheta_k^{(2)}$$

Introducendo le [15] nelle [9] e [10] abbiamo senz'altro

$$[16]\qquad -\vartheta_1^{(2)}=\vartheta_1^{(1)}\ , \qquad \vartheta_2^{(1)}=\vartheta_2^{(2)}$$

cioè le due coppie di condizioni $\vartheta_1^{(i,0)}=\vartheta_1^{(i)}$, $\vartheta_2^{(i,0)}=\vartheta_2^{(i)}$ (per $i=1,2$) danno luogo alle due sole condizioni [16].

Passiamo ora alle espressioni [11]; si deducono da esse le due relazioni

[17] $$\begin{cases} \vartheta_4^{(1)} = \vartheta_4^{(2)} + \dfrac{(n+3)}{2}\,\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_2^{(2)}\{' - (n+3)\,\vartheta_2^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' \\ \vartheta_4^{(2)} = \vartheta_4^{(1)} + \dfrac{(n+3)}{2}\,\vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_2^{(1)}\{' - (n+3)\,\vartheta_2^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{' \end{cases}$$

da cui, eliminando per esempio $\vartheta_4^{(1)}$ e semplificando, risulta:

$$\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_2^{(2)}\{' + \vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_2^{(1)}\{' = 2\left[\vartheta_2^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' + \vartheta_2^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{'\right]$$

che è evidentemente un'identità a causa delle [16]; se ne deduce che anche la coppia di condizione [17] ci porta all'unica condizione espressa da uno qualunque delle [17] stesse. Passiamo ora alle altre due condizioni $\vartheta_6^{(i,0)} = \vartheta_6^{(i)}$; scrivendo per un momento, per semplicità, le espressioni di $\vartheta_6^{(i,0}$ sotto la forma

$$\begin{cases} \vartheta_6^{(1,0)} = \vartheta_6^{(1)} = \vartheta_6^{(2)} + \dfrac{4}{n+1}\,\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_4^{(2)}\{' - \dfrac{16}{n+1}\,\vartheta_4^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' + A_2 \\ \vartheta_6^{(2,0)} = \vartheta_6^{(2)} = \vartheta_6^{(1)} + \dfrac{4}{n+1}\,\vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_4^{(1)}\{' - \dfrac{16}{n+1}\,\vartheta_4^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{' + A_1 \end{cases}$$

ed eliminando i ϑ_6 risulta identicamente

$$\frac{4}{n+1}\left[\vartheta_1^{(2)}\}\vartheta_4^{(2)}\{' + \vartheta_1^{(1)}\}\vartheta_4^{(1)}\{'\right] - \frac{16}{n+1}\left[\vartheta_4^{(2)}\}\vartheta_1^{(2)}\{' + \vartheta_4^{(1)}\}\vartheta_1^{(1)}\{'\right] + A_2 + A_1 = 0$$

ed introducendo in questa le [16] e [17], se ne deduce la condizione

[18] $$\vartheta_2^{(2)} = \vartheta_2^{(1)} = 0 \;,$$

dopo di che si ha senz'altro

$$\vartheta_4^{(1)} = \vartheta_4^{(2)} \;, \qquad \vartheta_6^{(1)} = \vartheta_6^{(2)} \,.$$

Ma dalla [18] risulta poi immediatamente che anche tutti gli invarianti successsivi $\vartheta_k^{(i)}$ (che sono sempre di peso pari) devono essere eguali; infatti se andiamo a calcolare un qualunque altro invariante $\vartheta_k^{(i,0)}$ (con $k \geqslant 8$), questo risulta espresso per mezzo di $\vartheta_k^{(i)}$, $\vartheta_{k-2}^{(i)}\}\vartheta_1^{(i)}\{'$, $\}\vartheta_{k-2}^{(i)}\{'\vartheta_1^{(i)}$

e di invarianti di peso $k-4$ o inferiore (e delle loro derivate) moltiplicati per $\vartheta_2^{(i)}$ (o per le loro derivate) o per $\vartheta_1^{(i)}$ (o per le loro derivate) ed infine i termini che posseggono il fattore $\vartheta_1^{(i)}$, lo contengono un numero dispari di volte. Allora, per il risultato precedente, segue senz'altro $\vartheta_k^{(i,0)} = \vartheta_k^{(i)}$.

Se ne conclude che, oltre alle condizioni espresse dal teorema di Burgatti-Brioschi, affinchè un sistema sia autoaggiuuto, devono essere soddisfatte le altre

$$\vartheta_1^{(1)} = -\vartheta_1^{(2)} \quad ; \qquad \vartheta_2^{(1)} = \vartheta_2^{(2)} = 0 \ .$$

8. - Possiamo quindi enunciare il fondamentale TEOREMA III:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema differenziale lineare, di forma ridotta

$$\begin{cases} A_{11}(y_1) + A_{12}(y_2) + \dots + A_{1m}(y_m) = 0 \\ A_{21}(y_1) + A_{22}(y_2) + \dots + A_{2m}(y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}(y_1) + A_{m2}(y_2) + \dots + A_{mm}(y_m) = 0 \end{cases}$$

sia autoaggiunto è che gli invarianti differenziali $\theta_k^{(i)}$ *(cioè quelli relativi ai polinomi differenziali* A_{ii}*) di peso dispari siano nulli, che gli invarianti differenziali di peso uno, relativi alle coppie di polinomi differenziali* A_{ik}, A_{ki} *siano opposti e che quelli di peso due siano nulli.*

Se ne deduce da ciò il notevole COROLLARIO: Considerata una coppia di polinomi differenziali A_{ik}, A_{ki} $(i \neq k)$ di un sistema autoaggiunto, i coefficienti di uno di essi sono pienamente determinati da quelli dell'altro, mentre i coefficienti di questo *risultano del tutto arbitrarii, eccetto quello della derivata* $(n-2)^{ma}$ *che deve essere la derivata del coefficiente della derivata* $(n-1)^{ma}$.

Per esempio sia il sistema di terza classe

$$[19] \quad y_i^{(n)} + \sum_1^n {}_k \binom{n}{k} \left\{ p_{ik} y_1^{(n-k)} + q_{ik} y_2^{(n-k)} + r_{ik} y_3^{(n-k)} \right\} = 0 ; \quad (p_{11} = q_{21} = r_{31} = 0)$$
$$[i = 1, 2, 3]$$

affinchè sia autoaggiunto deve aversi

$$q_{12} = q'_{11} \qquad r_{12} = r'_{11} \qquad q_{32} = q'_{31}$$

ed inoltre

$$\begin{cases} p_{21}=-q_{11} \\ p_{22}=-q'_{11} \\ p_{23}=-q_{13} \\ p_{24}=q_{14}-4q'_{13}+2q'''_{11} \\ p_{25}=-q_{15}+5q'_{14}-10q''_{13}+5q^{IV}_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} p_{31}=-r_{11} \\ p_{32}=-r'_{11} \\ p_{33}=-r_{13} \\ p_{34}=r_{14}-4r'_{13}+2r'''_{11} \\ p_{35}=-r_{15}+5r'_{14}-10r''_{13}+5r^{IV}_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} r_{21}=-q_{31} \\ r_{22}=-q'_{31} \\ r_{23}=-q_{33} \\ r_{24}=q_{34}-4q'_{33}+2q''_{31} \\ r_{25}=-q_{35}+5q'_{34}-10q''_{33}+5q^{IV}_{31} \end{cases}$$

. . . .

mentre i oefficienti p_{1i}, q_{2i}, r_{3i} devono esser legati dalle note relazioni dei coefficienti di un'equazione autoaggiunta.

§ 4. – La forma ridotta alterna dei sistemi lineari.

9. – *Definizione: Un sistema lineare si dirà di* forma alterna *se i suoi invarianti* $\vartheta_2^{(i)}$ *sono nulli,* cioè se in ogni equazione del sistema i coefficienti delle derivate $(n-2)^{me}$ delle funzioni, che non compaiono nelle derivate n^{me}, sono le derivate prime dei coefficienti delle derivate $(n-1)^{me}$.

Dalla considerazione dei sistemi autoaggiunti, svolta nel paragrafo precedente, risulta tutta l'importanza di questa forma alterna, perchè *i sistemi autoaggiunti,* in base al teorema III, *sono necessariamente di forma alterna.*

A questo proposito è essenziale osservare quanto segue:

Mentre per i sistemi di classe maggiore o uguale a tre, l'essere $\vartheta_2^{(i)}=0$ rappresenta una *effettiva condizione* a cui devono soddisfare i coefficienti, non altrettanto avviene per quelli di seconda classe (cioè per quelli in due funzioni incognite) in quanto che, *mediante sole operazioni algebriche e di quadratura è sempre possibile ridurre un sistema lineare di classe due alla forma ridotta alterna.*

Eseguiamo il calcolo, per semplicità di scrittura, per il caso di $m=3$, cioè partiamo dal sistema [19] però non di forma ridotta) ed eseguiamo su di esso la sostituzione di funzioni incognite

$$[20] \qquad y_i=\sum_{1}^{3}{}_k \delta_{ik}\, Y_k \qquad (i=1,2,3)$$

con il determinante $\Delta\equiv\|\delta_{ik}(x)\|$ non identicamente nullo.

Introducendo le [20] nel sistema dato si ha il sistema trasformato

$$[21]\quad \delta_{i1} Y_1^{(n)} + \delta_{i2} Y_2^{(n)} + \delta_{i3} Y_3^{(n)} + \sum_1^3{}_k \binom{n}{k} \left\{ P_{ik} Y_1^{(n-k)} + Q_{ik} Y_2^{(n-k)} + R_{ik} Y_2^{(n-k)} \right\} = 0$$

dove i coefficienti P_{ik}, Q_{ik}, R_{ik} sono dati dalle espressioni

$$[22]\begin{cases} P_{i1} = \delta'_{i1} + p_{i1}\delta_{11} + q_{i1}\delta_{21} + r_{i1}\delta_{31} \\ Q_{i1} = \delta'_{i2} + p_{i1}\delta_{12} + q_{i1}\delta_{22} + r_{i1}\delta_{32} \qquad (i = 1,2,3) \\ R_{i1} = \delta'_{i3} + p_{i1}\delta_{13} + q_{i1}\delta_{23} + r_{i1}\delta_{33} \end{cases}$$

$$[23]\begin{cases} P_{i2} = \delta''_{i1} + 2(p_{i1}\delta'_{11} + q_{i1}\delta'_{21} + r_{i1}\delta'_{31}) + p_{i2}\delta_{11} + q_{i2}\delta_{21} + r_{i2}\delta_{31} \\ Q_{i2} = \delta''_{i2} + 2(p_{i1}\delta'_{12} + q_{i1}\delta'_{22} + r_{i1}\delta'_{32}) + p_{i2}\delta_{12} + q_{i2}\delta_{22} + r_{i2}\delta_{32} \quad (i=1,2,3) \\ R_{i2} = \delta''_{i3} + 2(p_{i1}\delta'_{13} + q_{i1}\delta'_{23} + r_{i1}\delta'_{33}) + p_{i2}\delta_{13} + q_{i2}\delta_{23} + r_{i2}\delta_{33} \end{cases}$$

Il sistema [21] è senz'altro riducibile alla forma normale (cioè risolto rispetto alle derivate n^{me}) per l'ipotesi di $\Delta \neq 0$ ed effettuando la riduzione, con la regola di Cramer, avremo senz'altro

$$[24]\quad \begin{aligned} &\Delta Y_1^{(n)} + \binom{n}{1}\left\{\left(\sum_1^3{}_i P_{i1}\Delta_{i1}\right)Y_1^{(n-1)} + \left(\sum_1^3{}_i Q_{i1}\Delta_{i1}\right)Y_2^{(n-1)} + \left(\sum_1^3{}_i R_{i1}\Delta_{i1}\right)Y_3^{(n-1)}\right\} + \\ &+ \binom{n}{2}\left\{\left(\sum_1^3{}_i P_{i2}\Delta_{i1}\right)Y_1^{(n-2)} + \left(\sum_1^3{}_i Q_{i2}\Delta_{i1}\right)Y_2^{(n-3)} + \left(\sum_1^3{}_i R_{i2}\Delta_{i1}\right)Y_3^{(n-2)}\right\} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

ed analogamente per le altre due equazioni, se indichiamo con Δ_{ik} i complementi algebrici degli elementi δ_{ik} del determinante Δ.

Cominciando ora ad imporre la condizione che il sistema trasformato sia di forma ridotta, segue

$$\sum_1^3{}_i P_{i1}\Delta_{i1} = 0\ , \qquad \sum_1^3{}_i Q_{i1}\Delta_{i2} = 0\ , \qquad \sum_1^3{}_i R_{i1}\Delta_{i3} = 0$$

ed introducendo ivi le [21] risulta

$$[25]\quad \begin{cases} \sum_1^3{}_i \Delta_{i1}\delta'_{i1} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i1} p_{i1}\right)\delta_{11} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i1} q_{i1}\right)\delta_{21} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i1} r_{i1}\right)\delta_{31} = 0 \\ \sum_1^3{}_i \Delta_{i2}\delta'_{i2} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i2} p_{i1}\right)\delta_{12} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i2} q_{i1}\right)\delta_{22} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i2} r_{i1}\right)\delta_{32} = 0 \\ \sum_1^3{}_i \Delta_{i3}\delta'_{i3} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i3} p_{i1}\right)\delta_{13} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i3} q_{i1}\right)\delta_{23} + \left(\sum_1^3{}_i \Delta_{i3} r_{i1}\right)\delta_{33} = 0 \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro, si ricava una curiosa relazione per il determinante Δ della sostituzione, che ricorda quella di Liouville; infatti osservando che

$$\frac{d\Delta}{dx}=\sum_1^3{}_i\,\Delta_{i1}\,\delta'_{i1}+\sum_1^3{}_i\,\Delta_{i2}\,\delta'_{i2}+\sum_1^3{}_i\,\Delta_{i3}\,\delta'_{i3}\ ,$$

segue senz'altro

$$[26] \qquad \frac{d\Delta}{dx}+(p_{11}+q_{21}+r_{31})\,\Delta=0$$

o anche, per essere $\Delta \neq 0$:

$$\Delta=\Delta_0\,e^{-\int(p_{11}+q_{21}+r_{31})\,dx}$$

Andando ora ad imporre, per il sistema trasformato [24], le condizioni di alternanza, si trovano le condizioni

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k1}\,Q_{k2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k1}\,Q_{k1}\right\}\ ;\quad \frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k3}\,Q_{k2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k3}\,Q_{k1}\right\}\\
\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k1}\,R_{k2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k1}\,R_{k1}\right\}\ ;\quad \frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k3}\,R_{k2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k2}\,R_{k1}\right\}\\
\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k2}\,P_{k2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k2}\,P_{k1}\right\}\ ;\quad \frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k3}\,P_{k2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_1^3{}_k\,\Delta_{k3}\,P_{k1}\right\}
\end{array}\right.$$

Introducendo in queste le [22] e [23] e tenendo conto della [26], dopo calcoli assai lunghi, ma del tutto elementari, si deduce che

$$(\delta_{i1},\ \delta_{i2},\ \delta_{i2})$$

devono essere tre soluzioni linearmente indipendenti di certi sistemi di equazioni differenziali del primo ordine (in generale non lineari) e ciò conferma la prima parte della nostra asserzione.

10. – Supponiamo ora invece di considerare un sistema di seconda classe

$$y_i^{(n)}+\sum_1^n{}_k\binom{n}{k}\left\{p_{ik}\,y_1^{(n-k)}+q_{ik}\,y_2^{(n-k)}\right\}=0 \qquad (i=1,2)$$

e di eseguire su di esso la sostituzione

$$y_i=\delta_{i1}\,Y_{i1}+\delta_{i2}\,Y_{i2}\ ; \qquad (\Delta=\|\delta_{ik}\|\neq 0\ ;\quad i=1,2)$$

otterremo il sistema trasformato, analogo al sistema [24], i cui coefficienti, osservando che in questo caso si ha

$$\Delta_{11}=\delta_{22},\ \Delta_{22}=\delta_{11},\ \Delta_{12}=\delta_{21},\ \Delta_{21}=\delta_{12},$$

divengono

$$\left\{\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
P_{11} &= \delta_{22}(\delta'_{11}+p_{11}\delta_{11}+q_{11}\delta_{21})-\delta_{12}(\delta'_{21}+p_{21}\delta_{11}+q_{21}\delta_{21})\\
Q_{11} &= \delta_{22}(\delta'_{12}+p_{11}\delta_{12}+q_{11}\delta_{22})-\delta_{12}(\delta'_{22}+p_{21}\delta_{12}+q_{21}\delta_{22})\\
P_{21} &= -\delta_{21}(\delta'_{11}+p_{11}\delta_{11}+q_{11}\delta_{21})+\delta_{11}(\delta'_{21}+p_{21}\delta_{11}+q_{21}\delta_{21})\\
Q_{21} &= -\delta_{21}(\delta'_{12}+p_{11}\delta_{12}+q_{11}\delta_{22})+\delta_{11}(\delta'_{22}+p_{21}\delta_{12}+q_{21}\delta_{22})
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
P_{12} &= \delta_{22}\{\delta''_{11}+2(p_{11}\delta'_{11}+q_{11}\delta'_{21})+(p_{12}\delta_{11}+q_{12}\delta_{21})\}-\\
&\qquad -\delta_{12}\{\delta''_{21}+2(p_{21}\delta'_{11}+q_{21}\delta'_{21})+(p_{22}\delta_{11}+q_{22}\delta_{21})\},\\
Q_{12} &= \delta_{22}\{\delta''_{12}+2(p_{11}\delta'_{12}+q_{11}\delta'_{22})+(p_{12}\delta_{12}+q_{12}\delta_{22})\}-\\
&\qquad -\delta_{12}\{\delta''_{22}+2(p_{21}\delta'_{12}+q_{21}\delta'_{22})+(p_{22}\delta_{12}+q_{22}\delta_{22})\},\\
P_{22} &= -\delta_{21}\{\delta''_{11}+2(p_{11}\delta'_{11}+q_{11}\delta'_{21})+(p_{12}\delta_{11}+q_{12}\delta_{21})\}+\\
&\qquad +\delta_{11}\{\delta''_{21}+2(p_{21}\delta'_{11}+q_{21}\delta'_{21})+(p_{22}\delta_{11}+q_{22}\delta_{21})\},\\
Q_{22} &= -\delta_{21}\{\delta''_{12}+2(p_{11}\delta'_{12}+q_{11}\delta'_{22})+(p_{12}\delta_{12}+q_{12}\delta_{22})\}+\\
&\qquad +\delta_{11}\{\delta''_{22}+2(p_{21}\delta'_{12}+q_{21}\delta'_{22})+(p_{22}\delta_{12}+q_{22}\delta_{22})\}.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

Imponendo che il sistema sia di forma ridotta, cioè che sia $P_{11}=Q_{21}=0$, segue

$$\left\{\begin{aligned}
&(\delta_{22}\delta'_{11}-\delta_{12}\delta'_{21})+(p_{11}\delta_{22}-p_{21}\delta_{12})\delta_{11}+(q_{11}\delta_{22}-q_{21}\delta_{12})\delta_{21}=0\\
&(\delta_{11}\delta'_{22}-\delta_{21}\delta'_{12})-(p_{11}\delta_{21}-p_{21}\delta_{11})\delta_{12}-(q_{11}\delta_{21}-q_{21}\delta_{11})\delta_{22}=0
\end{aligned}\right.$$

da cui, in analogia alla [26]

[28] $$\frac{d\Delta}{dx}+(p_{11}+q_{21})\Delta=0\ .$$

Le condizioni di alternanza, per la [28] divengono

$$\frac{Q_{12}}{\Delta}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{Q_{11}}{\Delta}\right\},\quad \frac{P_{22}}{\Delta}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{P_{21}}{\Delta}\right\};$$

considerando la prima di queste due e introducendo in essa le espressioni sopra trovate per Q_{11}, Q_{12}, otteniamo facilmente l'equazione algebrica di secondo grado in δ_{12}, δ_{22}:

$$\}q_{12}-q'_{11}-q_{11}(p_{11}+q_{21})\{\delta^2_{22}+$$
$$+\}p_{12}-q_{22}-p'_{11}+q'_{21}+q^2_{21}+p^2_{11}\{\delta_{12}\delta_{22}-\}p_{22}-p'_{21}+p_{21}(p_{11}+q_{21})\delta^2_{12}=0$$

e *questa stessa equazione algebrica* si ottiene per δ_{11} e δ_{21}, tenendo conto della seconda delle condizioni [29] di alternanza.

Se ne deduce che i rapporti $\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}$, $\frac{\delta_{22}}{\delta_{12}}$ risultano radici dell'equazione di secondo grado.

[30] $$\}q_{12}-q'_{11}-q_{11}(p_{11}+q_{21})k^2+$$
$$+\}p_{12}-q_{22}-p'_{11}+q'_{21}+q^2_{21}-p^2_{11}\{k-\}p_{22}-p'_{21}+p_{21}(p_{11}+q_{21})=0$$ (1)

Se allora indichiamo con k_1, k_2 tali radici, avremo

$$\delta_{21}=k_1\delta_{11}\ , \qquad \delta_{22}=k_2\delta_{12}\ ,$$

dopo di che le [27] divengono

$$\begin{cases} (k_2-k_1)\delta'_{11}+(k_1k_2q_{11}+p_{11}k_2-q_{21}k_1-p_{21}-k'_1)\delta_{11}=0 \\ (k_2-k_1)\delta'_{12}+(k_1k_2q_{11}-p_{11}k_1-q_{21}k_2-p_{21}-k'_2)\delta_{12}=0 \end{cases}$$

che si integrano con quadrature.

E con ciò il nostro asserto resta completamente verificato e cioè resta dimostrata la profonda differenza che intercede tra i sistemi di seconda classe e quelli di classe maggiore.

---

(1) Osserviamo esplicitamente che se partiamo da un sistema avente già la forma ridotta e cioè se $p_{11}=q_{21}=0$, la [30] assume la forma invariantiva, particolarmente semplice

$$\vartheta_2^{(1)}k^2+\tau_2k-\vartheta_2^{(2)}=0$$

dove τ_2 è l'invariante $p_{12}-q_{22}$.


PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 12
pag. 129-144

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO DA A. GHIGI E F. P. POMINI

VIII. - EMITTERI (*)

CESARE MANCINI

SVMMARIVM. — Octoginta tres recensentur species hemipterorum heteropterorum, quae ab Exc.mo prof. A. GHIGI, Academico Pontificio, et a doct. F. POMINI in Gargano collectae sunt, et octo species a doct. POMINI collectae in Diomedeis insulis (quinque species antehac in his insulis nunquam repertae erant): maximi momenti sunt praesertim *Calocoris annulus* Brull. et *Spilostethus gibbicollis* Costa.

Gli emitteri eterotteri raccolti dal Prof. A. GHIGI e dal Dott. F. POMINI al Gargano non sono molti, in totale 83 specie; dato che nulla si conosce di questa regione e che alcune specie meritano di essere segnalate, credo utile pubblicarne l'elenco.

Riguardo alla distribuzione geografica poco si può dire, dato l'esiguo numero di specie raccolte; la fauna, come era da prevedere, è prevalentemente meridionale, infatti ben 31 sono le specie di questa zona, di esse va notato il *Calocoris annulus* Brull. che è specie pontica e lo *Spilostethus gibbicollis* Costa che è propria del Mediterraneo occidentale. È da segnalare inoltre la contemporanea presenza del *Rhinocoris Costae* Picco, specie probabilmente endemica dell'Italia centro-meridionale, e del *Rhinocoris anulatus* L. specie molto più settentrionale; è veramente interessante la presenza delle tre seguenti specie

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 29 settembre 1949.

Psallus varians H. S., *Catoplatus fabricii* St. e *Gastrodes grossipes* De G. note da noi solamente dell'Italia settentrionale.

Notonecta viridis Delcourt, *Velia Mulleri* Tom., *Rhinocoris Costae* Picco, *Calocoris hispanicus* Gimel., *Megalocoleus aurantiacus* Fieb., *Spilostethus gibbicollis* Costa e *Strobilotoma thypaecornis* F. non si trovano in Dalmazia e Albania.

Gli emitteri raccolti dal Dott. F. Pomini alle isole Tremiti sono solamente 8; ma pure essi interessano, perchè ben 5 specie non figurano tra quelle raccolte dal Dott. G. Cecconi [1].

Ringrazio il Prof. A. Ghigi di avermi concesso lo studio di questo materiale veramente interessante.

Fam. Notonectidae

Notonecta obliqua Gall.

Selva Umbra VIII-1934, 3 esemplari, leg. A. Ghigi. Un esemplare colle due macchie laterali omerali delle emielitre ben sviluppate e due esemplari con le macchie ridottissime, questi due esemplari si possono riferire alla varietà *meridionalis* Poiss. Europa media e meridionale; tutta Italia, la varietà è indicata del Veneto, Abruzzo e Lazio.

Notonecta viridis Delcourt.

Selva Umbra VIII-1934, 2 esempl. leg. A. Ghigi. Specie mediterranea, arriva fino all'Inghilterra; tutta Italia. I due esemplari sono pochissimo pigmentati e quindi riferibili alla forma tipica.

Fam. Gerridae

Gerris thoracicus Schumm.

Alveo S. Egidio V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie euro-sibirica, arriva al Marocco; tutta Italia, ma non comune.

---

(1) G. Cecconi, *Contributo alla fauna delle isole Tremiti.* «Boll. Mus. Zool. e Anat. comparata dell'Università di Torino», 1908-XXIII, N. 503.

Gerris lacustris L.

Bosco Sfilze V-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Specie eurosibirica; tutta Italia.

Fam. Veliidae

Velia Mülleri Tam.

S. Menaio IV-1940, 1 esempl.; Bosco Sfilze V-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Dalmazia, Italia meridionale (Puglie, Calabria, Sicilia), potrebbe essere una specie pontica, però è da troppo poco tempo che è stata descritta (1947) e quindi bisogna attendere la segnalazione di altre catture.

Velia major Put.

Valle d'Umbra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie mediterranea; tutta l'Italia peninsulare, arriva alla Romagna e al versante nordico dell'Appennino Genovese.

Fam. Hydrometridae

Hydrometra stagnorum L.

Alveo S. Egidio IV-1940, 1 esempl. Bosco Sfilze V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie euroasiatica, arriva all'Algeria, Marocco e Isole Canarie; tutta Italia.

Fam. Nabidae

Nabis myrmercoides Costa

Ginestra IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie di larga distribuzione geografica; tutta Europa, Regione mediterranea, Caucaso, Siberia, Regione neartica; comune in tutta Italia.

Nabis ferus L.

Selva Umbra V e IX-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Comune in tutta la Regione paleartica; comunissimo in tutta Italia.

Nabis rugosus L.

Selva Umbra V e IX-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Specie eurosibirica, si spinge all'Algeria e Marocco; tutta Italia.

Fam. REDUVIIDAE

Holotrichius denudatus Costa.

Isole Tremiti: S. Domino IV-1941, 1 esempl. allo stato larvale leg. F. Pomini. Già raccolto alle Tremiti da G. Cecconi, specie dell'Italia meridionale, Grecia, Ungheria e Russia meridionale, non si trova sull'altra sponda dell'Adriatico.

Pirates hybridus Scop.

Alveo S. Egidio IV-1940, 5 esempl. leg. F. Pomini. Specie mediterranea estesa fino al Caucaso e Turchestan; tutta Italia.

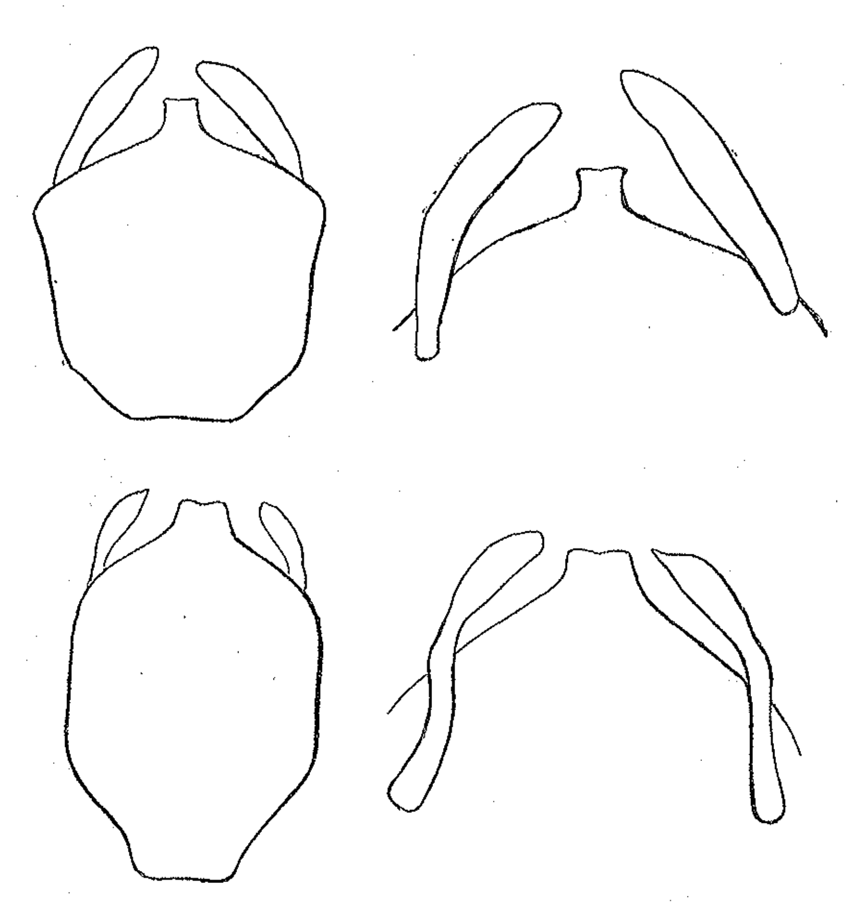
Rhinocoris annulatus L.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. ♂ leg. F. Pomini. Europa, Caucaso. Siberia; indicato di tutta l'Italia, ritengo però che nell'Italia meridionale e in Sicilia sia sostituita dalla specie seguente.

Rhinocoris Costae Picco.

Ginestra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Descritto da L. Picco nel 1920 (« Boll. Soc. Zool. Italiana » Sez. IV, Vol. I, pag. 99) senza indicare la località; ma dal titolo del suo lavoro « Descrizione di tre nuove specie di emitteri dell'Italia centrale » è da ritenersi che la specie sia descritta del Lazio; in seguito è stata solamente indicata da E. Boselli che la trovò frequente in Sicilia nella zona di Ucria-S. Piero Patti ove depone le uova sulle piante di nocciolo; io la conosco del M. Argentario, Perugia, Sasso Furbara (Lazio), M. Volture, Palizzi e Soveria Manelli (Calabria), Messina. Non comprendo perchè W. Stichel non la nomini nel suo catalogo degli emitteri europei, è una buona specie e si distingue facilmente dall'*annulatus* L. per la sua forma più snella, per il colorito dei suoi femori che hanno tre

anelli rossi e tre neri per il segmento genitale del ♂. Siccome Picco nella descrizione del segmento genitale del ♂ non è molto chiaro, ne riproduco la figura insieme a quella dell'*annulatus* L. È veramente interessante come nel Gargano vi siano le due specie.



Superiormente: *Rhynocoris Costae* Picco - Segmento genitale maschile.
Inferiormente: *Rhynocoris annulatus* L. - Segmento genitale maschile.

Fam. PHYMATIDAE

Phymata crassipes F.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa media, Regione mediterranea, Caucaso, Siberia, Asia Minore; tutta Italia.

Fam. Miridae

Adelphocoris vandalicus Rossi.

Varano 15-VIII-1934, 3 esempl. leg. A. Ghigi, Selva Umbra IX-1940 2 esempl. leg. F. Pomini. Specie meridionale arriva alla Germania meridionale; tutta Italia.

Adelphocoris lineolatus Goeze.

Selva Umbra IX-1940, 2 esempl., Ginestra, 1 esemp. leg. F. Pomini, tutti gli esemplari appartengono alla var. *binotatus* Hhn. Specie comunissima in tutta la Zona paleartica e in Italia.

Calocoris Schmidti Fieb.

Selva Umbra V-1940, 9 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Germania, Danimarca, Russia meridionale, Asia Minore, Caucaso, Regione neartica. Indicato dell'Italia meridionale e di Torino, io lo conosco pure del Veneto (Montello, Tarvisio).

Calocoris annulus Brullé.

Ginestra V-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Italia, Jugoslavia, Grecia, Asia Minore, Siria. D'Italia è indicato della Liguria, Venezia Giulia, Romagna, Toscana e Sardegna, io lo conosco pure del versante settentrionale dell'Appennino Genovese (Serravalle Scrivia), dell'Umbria e della Basilicata; specie certamente Pontica, penetrata in Italia più probabilmente dal ponte Garganico che dalla Venezia Giulia.

Calocoris hispanicus Gmel.

Alveo S. Egidio V-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini, 2 esempl. si riferiscono alla var. *nigridorsum* Costa.

Specie mediterranea arriva al Wurtemberg; comune nell'Italia meridionale e centrale.

Calocoris norvegicus Gmel.

Mandrione V-1940, 23 esempl. Alveo S. Egidio V-1940, 8 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Africa del nord, Siria, Asia Minore, Regione Neartica; comune in tutta Italia.

Pycnopterna striata L.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Caucaso, Siria; è probabile che si trovi in tutta Italia; ma molto rara.

Stenotus binotatus F.

S. Nicandro V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Asia Minore, Siberia, Regione Etiopica e Neartica; tutta Italia.

Lygus pratensis L.

S. Egidio 12-VIII-1934, 7 esempl. Alveo S. Egidio VIII-1934, 5 esempl. leg. A. Ghigi, Selva Umbra IX-1940, 23 esempl. Ginestra IX-1940, 6 esempl. leg. F. Pomini. Comune in tutta la Regione Paleartica; comunissima in tutta Italia.

Poeciloscytus cognatus Fieb.

S. Egidio 12-VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi. Europa, Asia Minore, Caucaso, Turchestan, Siberia; tutta Italia.

Capsodes mat Rossi.

Ginestra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Tunisia; sparsa in tutta l'Italia centrale e meridionale, Venezia Giulia.

Capsodes cingulatus F.

Ginestra V-1940, 4 esempl. leg. F. Pomini. Europa media e meridionale, Algeria, Asia Minore; indicato della Sicilia, io lo conosco pure della Toscana, Lazio e Calabria.

Stenodema calcaratum Fall.

Selva Umbra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Tutta Europa, Marocco, Algeria, Tunisia, Siria, Asia Minore, Caucaso, Turchestan, Siberia, Abissinia; tutta Italia.

Stenodema laevigatum L.

Varano 15-VIII-1934, 2 esempl. leg. A. Ghigi, Ginestra V-1940, 1 esempl,, Selva Umbra IX-1940, 11 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Algeria, Asia minore, Caucaso, Turchestan cinese, Regione Neartica; tutta Italia, comune.

Notostira tricostata Costa.

Selva Umbra, IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica; sparsa in tutta Italia.

Megalocera linearis Fuessl.

S. Nicandro V-1940, 8 esempl., Mandrione V-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Algeria, Caucaso; tutta Italia, comune.

Cyllocoris flavoquadrimaculatus De G.

Ginestra V-1940, 1 esempl. leg. F. Domini. Europa, Caucaso; Italia settentrionale e centrale, Sicilia.

Megalocoleus aurantiacus Fieb.

Mandrione V-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Algeria, Asia Minore, Sicilia, Sardegna, Corsica, Is. Capraia, Is. Giglio; io l'ho raccolto nel Lazio (Rocca di Papa), probabilmente si trova in tutta l'Italia meridionale.

Psallus variabilis Fall.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica, arriva all'Algeria; tutta Italia.

Psallus varians H. S.

Selva Umbra V-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Europa; indicato solamente dell'Italia settentrionale.

Fam. TINGIDAE

Catoplatus Fabricii St.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Baltico, Norvegia, Inghilterra, Francia, Belgio, Olanda, Germania, Ungheria, Austria, Italia, Romania; specie settentrionale, in Italia è indicata solamente per la parte continentale, questa sarebbe la cattura più meridionale conosciuta.

Monanthia echii Schrk.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Regione Mediterranea; tutta Italia.

Fam. PYRRHOCORIDAE

Pyrrhocoris apterus L.

Alveo S. Egidio IX-1940, 1 esempl., Isole Tremiti-S. Nicola, IV-1940, 12 esempl. leg. F. Pomini. Regione Paleartica, Neartica e Orientale, tutta Italia, comunissimo.

Fam. MYODICHIDAE

Spilostethus pandurus Scop.

S. Egidio VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi, Cagnano Varano IV-1941, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Turchestan, Regione Etiopica, Orientale e Australiana; tutta Italia, comune nella parte peninsulare, rara nella parte continentale.

Spilostethus equestris H. S.

Varano 15-VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi, Mandrione V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Paleartica; tutta Italia.

Spilostethus gibbicollis Costa.

Cagnano Varano IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Spagna, Marocco, Algeria, Tunisia. Specie del Mediterraneo occidentale, indicata per l'Italia, della Sicilia, Calabria e Sardegna, io la conosco pure della Basilicata.

Lygaeosoma reticulatum St.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica, arriva al Nord Africa; tutta Italia, molto comune.

Piocoris erythrocephalus Le P. S.

S. Menaio V-1940, 1 esempl., Ginestra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Crimea, Caucaso; Italia centrale e meridionale, non comune.

Macroplax fasciata H. S.

Ginestra V-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Caucaso, Turchestan; comune in tutta Italia.

Raglius saturnius Rossi.

Isole Tremiti - S. Domino IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Russia meridionale; Italia centrale e meridionale, raro nell'Italia settentrionale, nuovo per le Tremiti.

Raglius vulgaris Schill.

Ginestra V-1940, 1 esempl., Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Asia Minore, Caucaso, Transcaspio; tutta Italia.

Ischnopeza hirticornis H. S.

Mandrione V-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale Algeria, Siria, Caucaso, Transcaspio; per l'Italia è indicata solamente dell'Abruzzo e della Sicilia, io la conosco pure di Basilicata e di Calabria.

Gastrodes grossipes De. G.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica; Italia settentrionale, Corsica, nuovo per l'Italia meridionale.

Fam. Neididae

Apoplymus pectoralis Fieb.

S. Menaio IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Asia Minore; Italia meridionale, Lazio, Sardegna, Corsica.

Gampsocoris puncticeps Germ.

Selva Umbra VI-1941, 1 esempl. leg. F. Pomini. Media e sud Europa, Marocco, Algeria, Turchestan; tutta Italia.

Fam. Coreidae

Gonocerus acuteangulatus Goeze.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa media e meridionale, Asia Minore, Caucaso, Turchestan; tutta Italia.

Syromastes rhombea L.

Selva Umbra V-1940, 2 esempl., IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Tutti gli esemplari si riferiscono alla var. *quadrata* F. Specie mediterranea arriva al Caucaso, Turchestan e Transcaspio; tutta Italia, rara nella valle del Po.

Mesocerus marginatus L.

Varano 15-VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi, Selva Umbra IV-1940, 1 esempl., V-1940, 6 esempl., IX-1940, 4 esempl. leg. F. Pomini. Tutta la Regione Paleartica ad eccezione del Nord Africa; tutta Italia, comune.

Centrocoris spiniger F.

S. Nicandro V-1940, 1 esempl., Mandrione V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Mediterranea, arriva alla Crimea, Caucaso, Turchestan; tutta Italia.

Ceraleptus gracilicornis H. S.

Ginestra V-1940, 3 esempl., Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Mediterranea, arriva alla Germania meridionale, Russia meridionale, Caucaso; tutta Italia, molto rara.

Coriomeris Spinolae Costa

Selva Umbra V-1940, 1 esempl., Ginestra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Marocco, Asia Minore, Caucaso; Italia centrale e meridionale non comune, Piemonte, Lombardia, Romagna molto rara.

Coriomeris denticulatus Scop.

Selva Umbra V-1940, 2 esempl., Ginestra V-1940, 3 esempl., S. Nicandro V-1940, 1 esempl., Spilzc V-1940, 1 esemp. leg. F. Pomini. Specie Euriosibirica, arriva all'Algeria; tutta Italia.

Strobilotoma typhaecornis F.

Ginestra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Russia meridionale; Italia centrale e meridionale, Liguria, non comune.

Dicranocephalus agilis Scop.

Alveo S. Egidio IV-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Europa media, Regione Mediterranea, Canarie, Caucaso, Siberia; tutta Italia.

Micrelytra fossularum Rossi

S. Nicandro V-1940, 1 esempl., Selva Umbra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea; Italia peninsulare, comune, A. Griffini la indica del Piemonte senza precisare la località, dubito che si trovi in questa regione, Liguria, Istria.

Camptopus lateralis Germ.

S. Menaio IV-1940, 3 esempl., Selva Umbra IX-1940, 2 esempl., Ginestra IX-1940, 1 esempl., la var. *brevipes* H. S. a Cagnano Varano

IV-1940, 1 esempl. e S. Menaio IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, arriva alla Germania meridionale, Caucaso, Turchestan; tutta Italia.

Corizus hyosciami L.

Varano 15-VIII-1934, 1 esempl. A. Ghigi, S. Menaio IV-1940, 1 esempl., Ginestra IV-1940, 1 esempl., Mattinata IV-1940, 1 esempl., Selva Umbra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Paleartica; tutta Italia.

Rhopalus subrufus Gmel.

Ginestra VI-1940, 3 esempl., Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Nord Alfrica, Asia Minore, Caucaso, Siberia, Regione Orientale, Etiopica e Neotropica; tutta Italia.

Rhopalus parumpunctatus Schill.

Selva Umbra V-1940, 6 esempl., Ginestra IX-1940, 5 esempl., Mattinata IV-1941, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Canarie, Nord Africa, Turchestan, Siberia; tutta Italia, comune.

Stictopleurus abutilon Rossi

S. Egidio 12-VII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi, Selva Umbra IV-1940, 1 esemp., Mandrione V-1940, 1 esempl., Ginestra IX-1940, 9 esempl. leg. F. Pomini. Tutta Europa e Mediterraneo, Canarie, Caucaso, Turchestan, Siberia; tutta Italia, comune.

Maccevethus lineola F.

S. Domino IV-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Caucaso, Turchestan; Italia centrale e meridionale, Liguria, Piemonte, Venezia Giulia.

Chorosoma Schillingi Scill.

Ginestra IX-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Algeria, Siria, Caucaso, Turchestan; Italia centrale e meridionale, indicata pure del Piemonte e Romagna, io la conosco della Laguna Veneta e dei dintorni di Trieste.

Fam. PENTATOMIDAE

Odontotarsus purpureo-lineatus Rossi

Ginestra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica, Stichel per errore lo indica del Marocco e Algeria dove è sostituito dall'*O. grammicus* L.; tutta Italia.

Eurygaster maurus L.

Selva Umbra V-1940, 1 esempl., IX-1940, 1 esempl., Vacotenente IX-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea arriva all'Europa media; tutta Italia.

Graphosoma italicum Muell.

Varano 13-VIII-1934, 4 esempl. leg. A. Ghigi, Selva Umbra V-1940, 22 esempl., Ginestra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica: tutta Italia.

Dyroderes umbraculatus F.

Selva Umbra V-1940, 4 esempl., Ginestra V-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Regione Mediterranea, Russia meridionale, Caucaso; tutta Italia.

Aelia acuminata L.

Selva Umbra 13-VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi, Mattinata IV-1940, 1 esempl. S. Menaio IV-1940, 1 esempl.; Mandrione V-1940, 1 esempl., Selva Umbra V-1940, 5 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Nord Africa, Siria, Caucaso, Turchestan, Siberia; tutta Italia.

Aelia Germari Kust.

Isole Tremiti, S. Domino IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Spagna, Italia, Dalmazia, Marocco, Algeria; indicata per l'Italia, del Lazio, Puglie, Calabria, Sardegna, Sicilia, io la conosco pure dell'Abruzzo e della Basilicata. Nuova per le Tremiti, Horwath indica questa specie della Dalmazia, però A. Kormilev, nei suoi varii elenchi degli emitteri della Jugoslavia non la cita. Specie del Mediterraneo occidentale.

Neottiglossa pusilla Gmel.

Selva Umbra V-1940, 3 esempl. leg. F. Pomini. Specie Eurosibirica; tutta Italia.

Eusarcoris melanocephalus F.

Selva Umbra V-1940, 5 esempl., Ginestra IX-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Europa, Marocco, Algeria, Caucaso, Siberia, Giappone; tutta Italia.

Staria lunata Hhn.

S. Nicandro V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa media e meridionale, Algeria, Asia Minore, Caucaso, Persia; tutta Italia.

Peribalus strictus F.

S. Menaio IV-1940, 1 esempl., Ginestra IX-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Marocco, Algeria, Cirenaica, Siria; in tutta l'Italia peninsulare, Liguria, Trentino, Venezia Giulia, io lo conosco pure del Piemonte.

Peribalus albipes F.

Varano 15-VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi, Mattinata IV-1940, 1 esempl., Isole Tremiti, S. Nicola IV-1940 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa meridionale, Siria; tutta Italia; ma rara nella parte settentrionale.

Corpocoris pudicus Poda.

Varano 15-VIII-1934, 1 esempl., Selva Umbra 13-VIII-1934 2 esempl. leg. A. Ghigi, S. Menaio IV-1940, 5 esempl., Caprano Varano IV-1940, 1 esempl., Mandrione V-1940, 1 esempl., S. Nicandro V-1940, 1 esempl., Ginestra IX-1940, 1 esempl., Isole Tremiti-S. Domino IV-1940, 2 esempl., S. Nicola IV-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Tutti gli esemplari appartengono alle var. *fuscispinus* Boh. Regione Paleartica; tutta Italia, comunissimo, nuovo per le Tremiti.

Dolicoris baccarum L.

Selva Umbra 13-VIII-1936, 1 esempl. leg. A. Ghigi, IX-1940, 1 esempl., Isole Tremiti-S. Nicola IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Paleartica, Orientale e Neartica; tutta Italia, nuovo per le Tremiti.

Ererydema ornatum L.

Var. *pictum* H. S. Selva Umbra 13-VIII-1934, 1 esempl. leg. A. Ghigi; var. *decoratum* H. S. S. Menaio IV-1940, 5 esempl., Cagnano a Varano IV-1940, 20 esempl., Alveo S. Egidio V-1940, 1 esempl., Isole Tremiti–Caprara IV-1940, 2 esempl. leg. F. Pomini. Europa media, Mediterraneo, Caucaso, Turchestan, tutta Italia, comune, nuova per le Tremiti.

Eurydema oleraceum L.

Ginestra IX-1940, 1 esempl.; var. *albomarginatum* Goeze Ginestra IX-1940, 1 esempl., Selva Umbra V-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Specie cosmopolita; tutta Italia, comune.

Rhaphigaster nebulosa Poda.

S. Menaio IV-1940, 1 esempl., Selva Umbra IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa media e meridionale, Algeria, Asia Minore, Caucaso, Cina; tutta Italia, comune.

Zicrona coerulea L.

Alveo S. Egidio IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Regione Paleartica, Orientale e Neartica; tutta Italia.

Fam. CYDNIDAE

Brachypelta aterrima Forst.

S. Menaio IV-1940, 1 esempl. leg. F. Pomini. Europa media, Regione Mediterranea, Caucaso, Turchestan, Siberia meridionale, Sud Africa, India, Quensland; tutta Italia.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 13
pag. 145-196

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO DA A. GHIGI E F. P. POMINI

IX. - COLEOTTERI (*)

EDOARDO GRIDELLI

SVMMARIVM. — In hoc libello species Coleopterorum in Monte Gargano nec non in insulis Diomedeis ab Academico Pontificio A. GHIGI et Doctore F. P. POMINI collectae enumeratae sunt. Describitur *Dolicaon Pominii* spec. nova. Multae sunt species transadriaticae sensu lato, etiam in Balcania repertae.

Il nucleo fondamentale delle nostre conoscenze della fauna di coleotteri del Gargano è dato dalle ricerche di CARLO HOLDHAUS. Egli visitò il Gargano dal 10 al 30 maggio 1906 (accompagnato da H. STOLZ) e dal 3 al 18 aprile 1907 (in compagnia di A. KNIZ ed M. HILF); lo stesso HILF rimase sul Gargano fino al 20 giugno 1907, raccogliendo con grande cura e costanza nelle più svariate località del massiccio garganico, e dando speciale importanza alle raccolte di organismi terricoli.

Nelle collezioni del Museo di Vienna sono conservate le raccolte personali del Dott. CARLO HOLDAUS, nonchè esemplari interessanti di quelle dei suoi collaboratori. Un nucleo importante si trova nella collezione di Otto Leonhard (tutto il materiale raccolto da M. HILF).

Il tutto venne illustrato da CARLO HOLDHAUS nella sua magistrale memoria del 1911 (*Ueber die Coleopteren und Molluskenfauna des Monte*

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 29 settembre 1949.

Gargano, unter besonderer Berücksichtigung der Adriatisfrage « Denksch. Akad. Wissensch. Wien, Math.-Naturwiss. Klasse », Bd. LXXXVII, pp. 1-35), dalla quale risulta il numero elevato di specie raccolte da HOLDHAUS ed i suoi collaboratori: 1289 specie.

Nella stessa memoria sono studiati i molluschi terrestri. Non ho mai veduto alcuna memoria illustrante il resto delle raccolte.

Lo stesso HOLDHAUS (« Wien. Entom. Zeit. », 1915, p. 349) pubblicò una piccola aggiunta alla sua memoria del 1911, dando alcune interessanti notizie, aggiunta che non muta in alcun modo il numero delle specie citate nel 1911.

Successive raccolte sul Gargano vennero effettuate da ADRIANO FIORI, ma il materiale stesso andò variamente disperso. Una parte dovrebbe trovarsi nella collezione da lui ceduta al Museo dell'Università di Berlino, una parte potrebbe trovarsi nelle varie collezioni fatte successivamente da FIORI, ed infine una parte venne da lui ceduta in cambio o in vendita a vari entomologi, e tra questi CESARE MANCINI. FIORI non illustrò in modo particolare il materiale raccolto e si accontentò di dare notizia di poche specie, mirmecofile, alcune note (*Zyras ruficollis* Grimm, *Zyras laticollis* Maerk., *Claviger apenninus* Baudi) ed altre da lui ritenute inedite e descritte in una nota pubblicata nel 1914 (« Rivista Coleott. Ital. », XII) e precisamente: *Zyras pumilus* Fiori, *Trichonyx garganicus* Fiori, *Batrisodes garganicus* Fiori.

Sembra che il *Batrisodes garganicus* Fiori non sia altro che il maschio del *Batrisodes Laportei* Aubé (vedi BINAGHI, « Boll. Soc. Ent. Ital. », 1948, p. 78) fatto questo molto probabile, perchè lo stesso FIORI (l. c.) nota che un esemplare del suo *garganicus* si trova nella collezione da lui ceduta al Museo di Berlino, con il nome *Delaportei*.

Dalle date di cattura pubblicate da FIORI, e da quelle degli esemplari della collezione Mancini, risulta che Fiori visitò il Gargano nel maggio 1913 (e forse anche del marzo dello stesso anno: vedi FIORI l. c. sub *Claviger apenninus* Baudi).

Mi risulta inoltre che Fiori visitò le seguenti località garganiche: Lago Varano, Vico Garganico, Bosco Umbra, Monte S. Angelo, Vieste.

Ritenendo realmente inedite le specie descritte da FIORI ne risulterebbero 5 mancanti nell'elenco di Holdhaus, e quindi il numero complessivo delle specie note diventerebbe 1294.

Troviamo singoli dati, derivanti tutti dalle raccolte Holdhaus, nelle varie monografie sui *Catopidae*, pubblicate da R. Jeannel (« Boll. Soc. Ent. Ital. », 1923; Abeille XXXII, 1923; Monogr. Catopidae 1936), con conseguente aggiunta di due altre specie al numero suddetto: *Catops coracinus* Kelln. e *Catopomorphus orientalis* Aubé.

Nel giugno del 1926 il Gargano venne visitato dal Dott. J. Storkan dell'Università di Praga, ed il materiale da lui raccolto venne illustrato dal Dott. J. Roubal nel 1932 (« Boll. Soc. Ent. Ital. », p. 66): si tratta di 36 specie, delle quali 13 non trovate dai ricercatori precedenti.

Giovanni Binaghi, visitò pure il Gargano, nella primavera del 1948, raccogliendovi una ingente quantità di coleotteri, in corso di preparazione e di studio. In una piccola nota (« Boll. Soc. Ent. Ital. », 1948, p. 78) egli indica la presenza sul Gargano di alcune specie molto interessanti (*Claviger apenninus* Baudi, *Batrisus formicarius* Aubé, *Batrisodes Laportei* Aubé, *Scydmaenus rufus* Müll., *Scydmaenus Hellwigi* Herbst). Di queste tre non vennero raccolte dagli studiosi precedentemente citati e quindi il numero complessivo delle specie note del Gargano sale a 1312.

Questo quanto io ho potuto rilevare dalla letteratura. Ma è molto probabile che molti dati, spiccioli e no, mi sieno sfuggiti, ed è certo che molti altri ricercatori visitarono in vari periodi il Gargano. Ad esempio Ferdinando Solari e Carlo Confalonieri, almeno per quanto io ricordo.

Alessandro Ghigi e Francesco Pio Pomini, visitarono in più riprese il Gargano, e precisamente Ghigi nell'agosto 1934 e Pomini nel 1940 (seconda metà di aprile; fine maggio fino al 5 giugno) raccogliendovi un ingente materiale dei più svariati gruppi animali (1). Scopo della presente nota è la illustrazione dei coleotteri raccolti: alcune migliaia di esemplari, appartenenti a 408 specie delle quali ben 111 non vennero trovate dai ricercatori precedenti. Con ciò il numero delle specie note del Gargano sale a 1425.

Questo alto numero di nuovi reperti dimostra da un lato tutta la cura posta da Alessandro Ghigi e da Francesco Pio Pomini nelle

(1) Vedi; *L'importanza biogeografica della regione garganica*, in « Bollettino di Zoologia » pubblicato dalla Unione Zoologica Italiana, XII, 1941, p. 73-75.

loro ricerche, ma dall'altro lato dimostra pure che siamo ben lungi dal conoscere tutte le specie presenti attualmente sul Gargano.

Pur tuttavia quanto sappiamo è già sufficiente per tracciare un quadro attendibile della natura e della genesi della fauna del Gargano, tanto più che ho in corso di studio i materiali raccolti sul Gargano da GIORDANI SOIKA (1948) e SANDRO RUFFO (1949).

Uno degli aspetti più interessanti della fauna garganica è dato dal fatto che essa comprende un certo numero di specie presenti sia sulla opposta sponda adriatica, sia sulle isole interposte, la cui diffusione attuale « transadriatica » può essere spiegata ammettendo possibilità di comunicazione e legami territoriali che oggi non esistono più. Per quanto riguarda i coleotteri il problema delle specie transadriatiche venne posto e studiato da GIUSEPPE MÜLLER (*Zur Zoogeographie und Entwikklungsgeschichte der Fauna der österreichischen Küstenländer*: « Verhandlungen des VIII Internationalen Zoologen Kongresses zu Graz » (1910) 1912, p. 721) e da KARL HOLHDAUS (l. c., 1911). Successivamente lo stesso MÜLLER ritornò sull'argomento nel suo catalogo dei *Tenebrionidae* della Dalmazia (« Verh. zool.-botan. Gesellsch. », Wien, 1921, pp. 132-233); accenni allo stesso argomento affiorano qua e là in lavori posteriori.

Anche GHIGI e POMINI hanno posto il problema nella loro relazione preliminare già citata.

Le mie idee attuali su questo interessante argomento sono esposte in gran parte nella nota intitolata: *Il problema delle specie a diffusione transadratica* (« La Ricerca Scientifica », Roma, anno 19, n. 7, 1949, pp. 654-665).

Nella compilazione del catalogo delle specie raccolte sul Gargano da GHIGI e POMINI ho seguito, in linea di massima, la sistematica usata da JEAN SAINTE-CLAIRE DEVILLE per il suo Catalogo dei Coleotteri della Francia (« Abeille », XXXVI, 1935-38). Per ragioni di brevità ho ridotto al minimo le citazioni di letteratura ed ho omesso quasi sempre il numero degli esemplari raccolti. I nomi delle specie trovate per la prima volta sul Gargano sono preceduti da un asterisco. Quelli delle specie transadriatiche, nel senso lato della parola, sono stampati in neretto corsivo e seguiti da una succinta descrizione della loro area di diffusione.

Mi sia permesso infine di ringraziare vivamente il prof. Alessandro Ghigi per l'onore fattomi, affidandomi per lo studio le preziose raccolte conservate nel Museo da Lui creato nel magnifico Istituto di Zoologia dell'Università di Bologna, nonchè tutti coloro che mi aiutarono validamente nel lavoro, sia accettando di determinare le specie delle famiglie di loro competenza, sia mettendo a mia disposizione le loro collezioni. In particolare: Giovanni Binaghi (Genova), Milo Burlini (Ponzano Veneto), dott. Felice Capra (Genova), Mario Franciscolo (Genova), prof. Guido Grandi (Bologna), Carlo Lona (Trieste), dott. Mario Magistretti (Milano), rag. Cesare Mancini (Genova), dott. Giuseppe Müller (Trieste), dott. Sandro Ruffo (Verona), dott. Giovanni Springer (Trieste), dott. Ferdinando Solari (Genova), rag. Pietro Zangheri (Forlì).

CATALOGO DELLE SPECIE DEL GARGANO

CARABOIDEA (TERRESTRIA)

Cicindelidae

Cicindela lunulata nemoralis Ol. - Frequente lungo le sponde del Lago di Varano, su terreni salmastri (Pomini, Ghigi).

* *Cicindela trisignata* Dej. - Isola di Varano (Pomini). Vedi Gridelli, « Mem. Soc. Entom. Ital. », XXIII, 1944, p. 56 (1).

Cicindela campestris L. - Foresta Umbra (Pomini).

Carabidae

Carabus (Chaetocarabus) intricatus L. - Foresta Umbra, Foresta Ginestra, Yacotenente, frequente (Pomini).

Breuning (Monographie der Gattung *Carabus*, Bestimm. - Tab. 104, 1932, p. 1048) ha studiato le popolazioni garganiche di questo carabo, nonchè quelle del Monte Pagano, presso Castel di Sangro, e le considera appartenenti alla sbsp. *Lefebvrei* Dej. e precisamente alla natio *molisensis* Born. Alla stessa forma apparterrebbero esemplari del Lazio (Marino). Vedi pure Holdhaus (« Wien. Ent. Zeit. », XXXIV, 1915, p. 349).

* *Carabus (Megodontus) violaceus* L. - Foresta Umbra, un solo maschio. Lung. mm. 25, larg. mm. 10. Tegumenti bronzeo-purpurei, con la doccia marginale delle elitre di un vivo colore rosso porporino. Pomini leg.

(1) *Cicindela melancholica* Fabr. - Luigioni (I Coleotteri d'Italia) ne indica la presenza in Puglia, nel Lazio, nella Campania, nella Sicilia ed a Malta. Salvo queste due ultime indicazioni le altre esigono conferma e vanno riferite con tutta probabilità alla *trisignata* (errore di determinazione).

Io credo trattarsi di un tipico esemplare della sbsp. *picenus* Villa diffusa nell'Appennino meridionale e centrale. Curioso il fatto che il *violaceus* sia sfuggito all'osservazione di tutti coloro che visitarono il Gargano prima di Pomini.

Carabus (Eurycarabus) convexus Fabr. - Foresta Umbra (Pomini).

Secondo Breuning (l. c., p. 871) si tratta di una popolazione appartenente alla razza tipica *(convexus convexus)* e più precisamente alla natio *Paganettii* Born (= *apenninum* Depoli), alla quale appartengono tutte le popolazioni (comprese quelle garganiche) appenniniche, da quelle della Calabria meridionale all'Emilia. Lo stesso Breuning nega la dipendenza di questa forma dal *convexus Weisei* Reitt. del Velebit, Dalmazia, Bosnia ed Erzegovina (il confronto mi dimostra che egli è nel vero). Non si tratta quindi di una forma transadriatica [1] bensì di una forma che deriverebbe dalle popolazioni più settentrionali; difatti nelle popolazioni piemontesi del *convexus convexus* compaiono individui i quali, per la maggiore lucentezza dei tegumenti, accennano già a un passaggio alla forma appenninica, ossia alla natio *Paganettii* Born.

Calosoma inquisitor L. - Bosco Ginestra, una coppia (Pomini).

* *Campalita maderae* Fabr. - Alveo S. Egidio, un esemplare (Pomini), appartenente alla sbsp. *indagator* F. (Jeannel, 1940).

Leistus fulvibarbis Dej. - Foresta Umbra e Alveo S. Egidio (Pomini).

Leistus parvicollis Chaud. - Foresta Umbra, una coppia (Pomini).

Ritengo probabile che anche gli esemplari raccolti da Holdhaus presso S. Angelo, indicati con il nome di *montanus* Steph. appartengano in realtà a queste specie (vedi Holdhaus, « Denkschr. Akad. Wissensch. Wien, mathem.-naturw. Klasse », LXXXVII, 1911, p. 6).

---

(1) Invece la forma seguente sembra avere una netta diffusione transadriatica: ***Carabus hortensis Neumeyeri*** Schaum (= *calabrus* Fiori). Dalmazia, Erzegovina, Montenegro, Macedonia, Albania da un lato dell'Adriatico e Calabria (Sila Grande, Serra San Bruno, S. Eufemia d'Aspromonte) dall'altro. Vedi Breuning (l. c. p. 710).

Bänninger considera il *parvicollis* di Chaudoir quale razza del *montanus* Steph. (vedi « Entom. Mitteil. », XIV, 1925, p. 336), contrariamente alla opinione di Daniel K. (« Münchn. Koleopt. Zeitschr. », I, 1903, p. 171). Anche per Müller (« Studi Entomologici », Trieste, 1926, p. 48) il *parvicollis* è specificamente diverso dal *montanus* (e questa è anche oggi la sua opinione).

Specie largamente diffusa nella Balcania, dalla Grecia alla Venezia Giulia, esclusivamente in stazioni montane (vedi Müller l. c.). Per quanto riguarda l'Appennino esso è presente in varie stazioni montane del Lazio e dell'Abruzzo (vedi pure Straneo, « Boll. Soc. Entom. Ital. », 1933, p. 114).

D'accordo con Straneo io ritengo molto probabile che il *montanus* Steph. manchi nell'Appennino. Comunque, la sistematica e la diffusione in Italia delle tre entità in questione (*montanus* Steph., *raethicus* Heer e *parvicollis* Chaud.) non mi sembrano essere ancora sufficientemente chiarite.

Nebria brevicollis Fabr. - Cagnano Varano e Foresta Umbra, frequente (Pomini).

Notiophilus rufipes Curt. - Bosco Sfilze (Pomini).

* *Scarites terricola* Bon. - Cagnano Varano, un esemplare (Pomini).

* *Scarites laevigatus* Fabr. - Isola di Varano, due esemplari (Pomini leg.) che ricordano già alquanto quelli della sbsp. *venetus* Puel, razza caratteristica delle spiagge arenose veneto-padane.

* *Clivina fossor* L. - S. Nicandro, Alveo S. Egidio (Pomini).

Dyschirius importunus Schaum. - Alveo S. Egidio, tre esemplari (Pomini).

La stazione è dubbia, dato che si tratta di specie trovata finora esclusivamente in terreni salmastri.

* *Bembidiom decorum* Panz. - S. Menaio (Pomini).

Bembidion dalmatinum latinum Net. - Alveo S. Egidio (Ghigi).

Bembidion praeustum Fauveli Ganglb. – S. Menaio (Pomini).

È probabile che alla stessa razza appartengano i *praeustum* indicati da Holdhaus (1911, p. 6) di S. Angelo e della Costa di Manfredonia.

* ***Bembidion inoptatum*** Schaum. – Alveo S. Egidio, sei esemplari (Pomini).

Specie legata ai terreni palustri, descritta secondo esemplari di Creta, largamente diffusa nell'Europa orientale: Russia meridionale, Balcania, Ungheria, Moravia, Polonia meridionale; varie stazioni nella Austria, alla periferia delle Alpi (vedi Horion, « Faunistik der deutschen Käfer », I, 1941, p. 164).

Presente nella Venezia Giulia (varie stazioni istriane e del Goriziano) essa si spinge ad occidente nel Friuli (foci dell'Isonzo, Grado) e nella Venezia propria: Caorle (teste Müller); Venezia, prati dolci acquitrinosi nei pressi del vecchio forte di Marghera (Gridelli, Maura).

Lombardia: confluenza Po-Ticino (teste Binaghi). Emilia: San Felice (Fiori leg. in coll. Dodero); Brugneto (Alzona leg. teste Binaghi). Alluvioni del Tevere, nella alta valle tosco-umbra (Andreini, leg., Museo Trieste). Toscana: Pisa (teste Binaghi). Abruzzo: Castel di Sangro (Paganetti in coll. Dodero); Chieti, nelle alluvioni del Pescara (Straneo, Museo Trieste). Lazio: Roma (Straneo, teste Binaghi).

Assente nell'Europa settentrionale, Germania ed Alpi, Europa atlantica, isole del Mediterraneo occidentale.

Si tratta quindi di un elemento faunistico orientale, più o meno periadriatico.

Eotachys bistriatus Duftschm. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Trechus quadristriatus Schrank. – Foresta Umbra (Pomini).

Chlaenius spoliatus Rossi. – Alveo S. Egidio, un esemplare con i femori leggermente infoscati (Pomini).

Chlaenius chrysocephalus Rossi. – Alveo S. Egidio (Pomini).

* ***Chlaenius festivus*** Panz. – Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

Dalla Persia e dalle regioni del Transcaspio l'area di diffusione di questo carabide copre la Siria, l'Asia Minore, la Russia meridionale,

la Balcania, l'Ungheria e la Moravia; singole stazioni nella Germania orientale. Presente nell'Istria, nell'Italia centrale (Roma, Chieti, Poggio Cavallo), nell'Isola del Giglio ed in alcune stazioni litorali della Francia meridionale.

* *Agostenus vestitus* Payk. - Alveo S. Egidio (Ghigi); Cagnano Varano e S. Menaio (Pomini).

Agostenus variegatus Fourcr. - Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

* *Agostenus migricornis* Fabr. - Alveo S. Egidio, un esemplare con zampe interamente gialle (var. *melanocornis* Dej.). Pomini leg.

* *Agostenus tristis* Schaller. - S. Nicandro (Pomini).

* *Oodes gracilis* Villa. - Cagnano Varano, un maschio e due femmine (Pomini).

Badister bipustulatus Fabr.

Umbra, una femmina, riferibile, almeno con tutta probabilità, alla forma tipica della specie come intesa da Müller (Coleotteri della Venezia Giulia, I, 1926, p. 139). Sarebbe utile esaminare i maschi, utilizzando il lavoro recentemente pubblicato da Harald Lindberg (« Notulae Entomologicae », edidit Societas Entomologica Helsingforsiensis XXVIII, 1948, p. 96).

Ditomus calydonius Rossi. - Alveo S. Egidio, un maschio (Pomini).

Acinopus picipes Ol. - Cagnano Varano (Pomini).

Ophonus sabulicola Panz. - Alveo S. Egidio, tre esemplari raccolti da Pomini, riferibili, secondo me, alla sbsp. *columbinus* Germ. alla quale razza anche Holdhaus ha assegnato i suoi esemplari di S. Angelo e del Lago S. Giovanni, per quanto la punteggiatura degli intervalli delle elitre sia un poco più rada che nei veri *columbinus*, della Balcania, della Venezia Giulia e dell'Italia settentrionale. Essi sono uguali ad esemplari della Sicilia (Monte Crasto e Messina, Lona leg. 1937, Museo Trieste).

Non può trattarsi della forma *calabrus* Schaub. razza (?) descritta secondo un unico maschio con la punteggiatura degli intervalli delle elitre rada, triseriata.

* *Ophonus diffinis* Dej. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Ophonus azureus Fabr. - Alveo S. Egidio, una femmina (Pomini), riferibile alla forma descritta da SCHAUBERGER con il nome di *supremus*, forma della quale ho sott'occhio esemplari di Sicilia e di Roma.

Ophonus pubescens Müll. - Alveo S. Egidio, Bosco Ginestra (Pomini).

Harpalus oblitus Dej. - Alveo S. Egidio, una coppia (Pomini).

La convessità del pronoto e la riduzione della punteggiatura della parte posteriore dello stesso, tra le fossette, farebbero pensare alla razza occidentale, ossia al *patruelis* Dej. (MÜLLER, « Carabiden-studien », p. 59), la quale mi è nota di Sicilia (Madonie, Lona leg., Museo Trieste).

Harpalus distinguendus Duftschm. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Harpalus cupreus Dej. - Alveo S. Egidio (Pomini), 17 esemplari di colore verde e azzurro cupo (solo due di color verde oliva), riferibili alla forma tipica, con tutta la base del pronoto punteggiata; uno solo con zampe interamente testacee (variazione cromatica individuale, denominata *rhodopus* da Schauberger).

Non si tratta in alcun caso della sbsp. *Ragusae* Müll., della quale ho veduto i tipi ed una serie del Monte Antenna (Madonie, Lona leg.), razza ben differenziata e non insignificante variazione individuale come crede JEANNEL (Faune de France 40, Coléopt. Carab. 1942, p. 672).

Harpalus dimidiatus Rossi. - Alveo S. Egidio, 14 maschi e sei femmine (Pomini).

Nessuno di essi può essere riferito al *Roubali* Schaub. dell'Europa orientale.

* *Harpalus rubripes* Duftschm. - Foresta Umbra (Pomini).

* *Harpalus atratus* Latr. - Foresta Umbra e Bosco Ginestra (Pomini).

Harpalus sulphuripes Germ. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Harpalus serripes Quens. - Foresta Umbra (Pomini).

Harpalus anxius Duftschm. - Alveo S. Egidio, una femmina riferibile alla forma tipica (Pomini).

Parophonus maculicornis Duftschm. - Foresta Umbra (Pomini).

Parophonus mendax Rossi. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Stenolophus teutonus (Schrank) Schauberg. - Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

Acupalpus meridianus L. - Alveo S. Egidio, Foresta Umbra (Pomini).

* *Acupalpus puncticollis* Coq. - Alveo S. Egidio (Pomini).

È la specie descritta a suo tempo dal Reitter con il nome di *paludicola*.

* *Scybalicus oblongiusculus* Dej. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Anisodactylus binotatus Fabr. - Alveo S. Egidio, forma tipica, a zampe nere (Ghigi, Pomini).

* *Amara similata* Gyllh. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Amara aenea Degeer. - Alveo S. Egidio e Cagnano Varano (Pomini).

Amara lucida Duftschm. - Foresta Umbra (Pomini).

Amara apricaria Payk. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Poecilus cupreus L. - Alveo S. Egidio, aprile, 147 esemplari (Ghigi, Pomini).

Zampe nere, antenne nere con i due primi articoli giallo-rossicci; colore dominante il nero-violetto ed il nero. Variano la larghezza della zona spianata laterale del pronoto, la estensione della punteggiatura della zona posteriore dello stesso, nonchè la densità dei punti della zona mediana della serie umbilicata (talvolta nelle due elitre dello stesso individuo).

Gli esemplari suddetti, nonchè quelli a me noti nei dintorni di Roma (e credo lo stesso valga per tutti gli individui dell'Italia centrale e meridionale) appartengono alla forma che viene generalmente indicata con il nome di *calabrus* Flach.

Flach usò per il primo questo nome (« Deutsche Entom. Zeit. », 1907, p. 15) per una serie di esemplari di Calabria (S. Eufemia d'Aspromonte, S. Cristina, Antonimina) che ritenne rappresentassero una specie diversa dal *cupreus*, specie che poi, nello stesso lavoro (p. 17) disse essere identica al *Rebeli* Apflb., della Balcania meridionale.

Gli esemplari italiani non hanno nulla a che fare con il vero *Rebeli*, che Flach probabilmente non ha mai veduto. L'errore venne rilevato da vari autori (ad esempio Leoni 1908, Fiori 1912, Schatzmayr 1942) i quali, generalmente, videro nella forma italiana una razza del *cupreus* L.

Per me il nome *calabrus* non avrebbe ragione di esistere. Le popolazioni del Gargano (e ciò mi sembra valere anche per quelle di Roma, a giudicare da pochi esemplari esaminati) sono formate da individui i quali sono morfologicamente non distinguibili dai *cupreus* del settentrione. Cromaticamente, dette popolazioni sono caratterizzate da una tendenza al melanismo, data sia dalla assenza (o grande rarità) di individui con femori rossi, o zampe interamente rosse (i quali compaiono così frequentemente in popolazioni settentrionali o di montagna: ad esempio Alpi d'Albania) e dalla dominanza di individui con tegumenti dorsali nero-azzurri o neri.

Comunque, gli individui della così detta sbsp. *calabrus* Flach sono determinabili soltanto se muniti di etichetta di località.

Argutor elongatus Duftsch. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Platysma nigrum Schall. - Bosco Ginestra e Foresta Umbra (Pomini).

* *Platysma nigrita* Fabr. - Valle d'Umbra, Alveo S. Egidio, Bosco Sfilze (Pomini).

* *Steropus melas* Creutz. - Lago di Varano, Alveo S. Egidio, Bosco Ginestra, Foresta Umbra (Ghigi, Pomini) numerosi esemplari, tutti appartenenti alla sbsp. *italicus* Dej.

* *Abax ater* Villers. - Sponde del Lago di Varano, Bosco Ginestra, Bosco Sfilze, Foresta Umbra (Ghigi, Pomini).

Le popolazioni garganiche non differiscono da quelle appenniniche e corrispondono quindi a quella forma che Porta (« Fauna Coleopt. Ital. »,

I, 1923, p. 168) ritiene essere l'*Abax contractus* sbsp. *curtulus* Fairm. Vedi pure Schatzmayr (« Natura », XXXV, 1944, p. 25).

Platyderus spec. – Foresta Umbra, una femmina (Pomini).

Un maschio e tre femmine delle raccolte Holdhaus al Gargano (coll. Müller). Località citate da Holdhaus (1911): S. Angelo e Lago S. Giovanni.

Ho inviato il materiale suddetto all'amico Giovanni Binaghi (Genova) ed ecco quanto egli mi scrive in data 20 luglio 1949):

« Gli autori che fino ad oggi hanno preso in esame la coleotterofauna del promontorio del Gargano, e tra i quali primeggia Holdhaus, hanno riallacciato la popolazione di *Platyderus* presente in questo territorio ad una entità eminentemente appenninica e precisamente al *Platyderus canaliculatus* sbsp. *neapolitanus* Reiche. Da una revisione delle specie italiane e di un cospicuo numero di specie balcaniche, in corso di elaborazione, sono emersi una serie di nuovi elementi diagnostici sulla scorta dei quali è oggi possibile asserire che i *Platyderus* del Gargano presentano per contro una stretta affinità con le specie balcaniche e con maggiore risalto con il *dalmatinus* Mill. ».

Calathus fuscipes sbsp. *latus* Serv. – Bosco Ginestra, Alveo S. Egidio (Pomini).

Calathus mollis Marsh. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Indicato da Holdhaus (1911) con il nome di *ochropterus* Duftsch. (*mollis* Auct.).

* *Laemosthenes venustus* (Dej.) Jeann. – Foresta Umbra (Pomini).

* *Synuchus nivalis* Gyllh. – Un maschio, raccolto dal prof. Ghigi nell'agosto 1934, sulle sponde del Lago di Varano. Potrebbe al caso trattarsi di qualche stazione montana del Gargano.

Specie dell'Europa media, presente nelle Alpi e nella Venezia Giulia montana (zona del faggio). Sembra essere rara (o meglio poco nota) nell'Appennino. Presente pure nella Sicilia (Madonie, sec. Luigioni); Elba (sec. Holdhaus); Corsica (stazioni montane).

Anchus ruficornis Goeze. – San Menaio, un esemplare (Pomini).

Agonum sordidum Dej. – Alveo S. Egidio, 41 esemplari (Pomini).

Già noto a Holdhaus (un esemplare di S. Angelo).

Riferirò in altro lavoro sulle razze di questa specie e sulla loro diffusione. Gli esemplari del Gargano, e quelli di tutta Italia, appartengono a quella forma che venne descritta dallo Schatzmayr con il nome di *Gridellii*, secondo esemplari dei dintorni di Trieste, e che viene ritenuta oggi razza del *sordidum*.

Holdhaus (l. c., 1911, p. 28) ritiene il *sordidus* specie transadriatica.

Anchomenus dorsalis Pontopp. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Lebia humeralis Dej. – Alveo S. Egidio, un esemplare (Ghigi).

Segnalata da Holdhaus (l. c., 1911, p. 7) di S. Angelo e della Costa di Manfredonia.

Questa specie, descritta da Dejean di Dalmazia, è largamente diffusa nella Europa sud-orientale, dalla Russia meridionale (segnalata anche della Siria) alla Balcania ed Ungheria. Presente pure nella Slovacchia essa raggiunge il margine orientale delle Alpi, ove si trova in varie stazioni dell'Austria inferiore (indicata da Duftschmidt con il nome di *turcica*) e della Stiria meridionale.

Presente nella Dalmazia (Zara!) essa si trova, piuttosto rara, nella zona costiera di tutta la Venezia Giulia (vedi Müller, « Studi Entom. », I, 1926, p. 252); personalmente ho esaminato vari esemplari dei dintorni di Trieste!

Manca nella Germania (vedi Horion, « Faunistik der deutschen Käfer », I, 1941, p. 331), nell'Europa settentrionale, nell'Europa occidentale atlantica, Francia compresa, e manca pure nelle isole del Tirreno (la sua presenza a Capri mi sembra bisognevole di conferma).

Per quanto riguarda l'Italia, oltre alle località suddette del Gargano e della Venezia Giulia, io l'ho raccolta personalmente a Venezia (Lido, in località Quattro Fontane, in maggio ed a Fusina, in settembre, falciando i prati) ed ho veduto esemplari di Roma, nelle collezioni del Museo di Trieste.

Secondo gli autori essa avrebbe una diffusione ben più ampia in Italia, ossia « Tutta Italia e Capri » (secondo Luigioni) e « dalla Calabria fino a Venezia » secondo Horion (l. c.). Fiori ha descritto di S. Felice nel Modenese una var. *apicata*, le cui elitre sarebbero prive

della normale macchia apicale giallo-rossiccia. Io credo che la diffusione in Italia esiga ulteriore studio, data la facilità con la quale la *humeralis* può essere confusa con la *scapularia* Fourcr.

Comunque sia, la *Lebia humeralis* Dej. è un elemento faunistico orientale, transadriatico oppure periadriatico.

Polystichus connexus Geoffr. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Brachynus crepitans L. - Alveo S. Egidio, 38 esemplari della forma tipica, 8 con gli articoli secondo e terzo delle antenne parzialmente infoscati, 4 della var. *fallax* Apflb.

Brachynus plagiatus Reiche. - Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

Brachynus Ganglbaueri Apflb. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Brachynus sclopeta Fabr. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Brachynus explodens Duftsch. - Alveo S. Egidio, un maschio e cinque femmine (Pomini).

Femori giallo-bruni, a tinta carica, i posteriori con la parte prossimale leggermente e più o meno estesamente infoscata. Tutte le tibie nere, oppure più o meno estesamente giallo-brune distalmente e prossimalmente. Tarsi di colore bruno-giallo chiaro (i protarsi più chiari); meso- e metatarsi con il primo articolo (oppure i due primi) più o meno infoscati. Ventre nero. Antenne: primo articolo giallo chiaro, secondo di un giallo più oscuro, terzo e quarto neri, i seguenti bruni, con zona nero-bruna o nera (in qualche esemplare le antenne sono nel loro complesso più chiare). Organi boccali giallo-rossicci. Elitre azzurre, dilatate posteriormente ed ivi più convesse che nei normali *explodens*; punteggiatura decisa; in qualche esemplare esse presentano un accenno di solchi longitudinali.

Non sono in grado di distinguere questi esemplari da altri, raccolti in Albania, a Llogara (Stolfa), a Durazzo (Stolfa) ed a Argirocastro (Weirather), che credo debbano essere riferiti alla sbsp. *sichemita* (Reiche) Apflb. Ma il vero *sichemita* Reiche dovrebbe avere le zampe interamente nere, salvo le articolazioni, rossicce.

Il fallo non fornisce alcun criterio atto a differenziare queste popolazioni da altre settentrionali, ad esempio dei dintorni di Trieste.

Ritengo probabile che si tratti, anche in questo caso, di una razza a diffusione transadriatica. Il materiale studiato è troppo scarso per decidere in merito.

CARABOIDEA (AQUATICA)

Dytiscidae

* *Laccophilus hyalinus* De Geer. – Alveo S. Egidio, tre esemplari della sbsp. *testaceus* Aubé (vedi MÜLLER, «Studi Entom»., I, 1926, p. 281. In coll. Müller alcuni esemplari etichettati «Varano, Italia».

* *Laccophilus minutus* L. – Cagnano Varano (Pomini).

* *Hydroporus pubescens* Gyllh. – Bosco Sfilze (Pomini).

* *Hydroporus tessellatus* Drap. – Bosco Sfilze (Pomini),

Agabus didymus Oliv. – Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Agabus biguttatus* Oliv. – San Menaio, una femmina della forma tipica (Pomini).

Agabus bipustulatus L. – Alveo S. Egidio, Bosco Sfilze (Pomini).

* *Agabus nebulosus* Forst. – Bosco Sfilze (Pomini).

* *Dytiscus circumflexus* F. – Umbra (Pomini).

Gyrinidae

Gyrinus Dejeani Brullé. – Alveo S. Egidio, Bosco Sfilze (Pomini).

STAPHYLINOIDEA

Silphidae

* *Necrophorus interruptus* Steph. – Umbra (Pomini).

Silpha Olivieri Bedel. – Lago di Varano, Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

Ablattaria laevigata F. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Staphylinidae

Anthobium umbellatarum Kiesw. - Foresta Umbra (Pomini).

Citato con lo stesso nome anche da Holdhaus (1911). Specie molto affine e simile al *dissimile* Luze, della Balcania.

Anthobium sorbi Gyllh. - Foresta Umbra (Pomini), un maschio.

Omalium cinnamomeum Kr. - Foresta Umbra (Pomini).

Omalium tricolor Rey (= *italicum* Bernh.). - Foresta Umbra (Pomini).

Oxytelus sculpturatus Gravh. - Foresta Umbra (Pomini).

Stenus morio var. *aequalis* Muls. Rey. - Alveo S. Egidio (Pomini), un esemplare determinato mediante confronto con un esemplare di Dalmazia della coll. Müller, classificato da Benick.

Stenus subaeneus Er. - Foresta Umbra (Pomini).

Medon brunneus Er. - Foresta Umbra (Pomini).

Dolicaon Pominii n. sp. - Usando per la determinazione degli esemplari la mia tabella del 1926 (« Boll. Soc. Ent. Ital. », pp. 153-157) si arriva senz'altro all'*illyricus* Er., dal quale esso differisce sia per la punteggiatura del capo, del pronoto e delle elitre a punti più piccoli e più radi, sia per la struttura in media minore, sia infine per la struttura del fallo, la cui parte apicale ha forma ben diversa ricordante molto quella del *densiventris* Fauv. (l. c., p. 152, fig. 5).

Lungh.: mm. 7. Umbra, aprile 1940, due machi, Pomini leg. (Musei di Trieste e della Università di Bologna). Citato del Gargano (Bosco Spigno) con il nome di *illyricus* Er. (Holdhaus, 1911, p. 8), almeno lo credo, dato che non ho veduto gli esemplari in questione.

Obs. Nel lavoro suddetto io ho studiato la sistematica dei *Dolicaon* usando per la prima volta i caratteri differenziali forniti dalla struttura del fallo. Mi sono però limitato alla morfologia esterna dello stesso. Sarebbe però opportuno ristudiare il genere su base nuova ossia esaminando le sclerificazioni dell'endofallo, le quali sono cospicue, almeno a giudicare dall'esame per trasparenza e potranno

forse fornire criteri atti a giudicare le affinità delle specie, le quali sono più numerose di quanto io credevo nel 1926. Così, ad esempio, Lona raccolse sul Monte Crasto, in provincia di Messina (20 maggio 1937; Museo Trieste) un esemplare di sesso femminile, il quale si determina pure quale *illyricus* Er. ma è diverso sia da questa specie, sia dal *Pominii*.

Leptolinus nothus Er. - Foresta Umbra (Pomini).

Staphylinus olens Müll. - Bosco Ginestra ed Alveo S. Egidio (Pomini).

Staphylinus italicus garganicus Fiori. - Ginestra, Umbra, Valle d'Umbra, Yacotenente (Pomini, Ghigi).

Forma endemica del Gargano, ad elitre nere e zampe gialle rossicce.

Staphylinus similis Fabr.

Questa specie compare sul Gargano in una forma a zampe rosso brune, osservata per la prima volta da HOLDHAUS (1911: S. Angelo, Bosco Spigno, Cagnano) e citata nella sua memoria con il nome di *brunnipes* Fabr. (in base a determinazione di Max Bernhauer). Più tardi (Wiener Entom. Zeit. 1915, p. 349) lo stesso HOLDHAUS ritenne errata la determinazione di Bernhauer e credette che gli esemplari in questione appartenessero forse allo *Staph. pullus* Hochh. (= *simulator* Epp.). Ed infine MÜLLER (« Boll. Soc. Ent. Ital. », 1923, p. 140) assegnò, e giustamente, questi esemplari al *similis* Fabr., riferendogli, con dubbio, alla var. *decurtatus* Muls.; egli vide esemplari della stessa forma raccolti a Vallo Lucano da F. Solari. Presentemente Müller conosce anche esemplari di altre località italiane, denominati tutti in collezione con il nome di *similis ochropus* Müll. in litt.

Pomini ne ha raccolto un maschio.

* *Philonthus intermedius* Boisd. - Cagnano Varano (Pomini).

Philonthus coruscus Gravh. - Foresta Umbra (Pomini).

* *Philonthus fenestratus* Fauv. - Cagnano Varano, un maschio (Pomini).

* *Quedius cruentus virens* Rottb. - Umbra (Pomini).

Quedius mesomelinus Marsh. – Grotta Monte Nero (Pomini).

Quedius fumatus Steph. – Foresta Umbra (Pomini).

Tachyporus nitidulus Fabr. – Umbra (Pomini).

* *Tachyporus hypnorum* Fabr. – Bosco Ginestra (Pomini).

Homoeusa acuminata Märk. – Foresta Umbra (Pomini).

Pselaphidae

Bythinus italicus Baudi. – Umbra, una femmina, raccolta da Pomini e determinata da Binaghi.

Scydmaenidae

Mastigus pilifer Kraatz. – Umbra e S. Nicandro (Pomini).

I maschi con peli eretti lunghi, sparsi radamente su tutta la superficie delle elitre; le femmine con peli eretti corti, alla base ed all'apice delle elitre. Ho pure veduto una femmina di una località non precisata della Calabria.

Holdhaus (1911) segnala del Lago S. Giovanni e Carbonara il *Mastigus Heydeni* Rottb.; io ho esemplari della « Calabria » e dell'Aspromonte (Lona leg.).

Credo trattarsi di due specie distinte per quanto molto affini.

Scaphidiidae

Scaphosoma agaricinum L.

Umbra, un solo esemplare, con la punteggiatura del pronoto formata da punti ben più piccoli di quella delle elitre, ma perfettamente visibile mediante lente forte (35 ×).

Liodidae

Agathidium laevigatum Er. – Umbra (Pomini): quattro individui, con antenne concolori, giallo brune.

Leptinidae

Leptinus testaceus Müll. – Grotta Umbra, una serie di otto esemplari raccolti da Pomini.

Secondo Jeannel è un ectoparassita dei roditori e quindi la sua presenza in grotte (ricordo una serie trovata in una piccola grotta che si apre nell'abitato di Opicina, detta « Clementina ») potrebbe essere legata a roditori abitanti all'entrata della grotta. Ho avuto esemplari dell'alto Carso istriano (Piedimonte del Taiano), raccolti in un nido di ghiro. Holdhaus (1911) l'ha trovato sul Gargano, a S. Angelo ed al Lago S. Giovanni, crivellando fogliame marcescente. Schatzmayr (« Natura », XXXVI, 1445, p. 41) ha trovato 4 esemplari sotto un topo morto, giacente su un viottolo presso Duino (Trieste).

Catopidae

Nargas badius Sturm. – Umbra, 5 maschi e due femmine (Pomini).

Ptiliidae

Acrotrichis intermedia Gillm. – Umbra, una serie di nove esemplari (Pomini).

HYDROPHILOIDEA

Hydrophilidae

* *Helochares lividus* Forst. – Cagnano Varano, Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Cryptopleurum minutum* F. – San Menaio (Pomini).

Histeridae

Platysoma frontale Payk. – Umbra (Pomini).

Platysoma compressum Herbst. – Umbra (Pomini).

* *Hister maior* L. - Mandrione (Pomini).

Hister quadrimaculatus L. - Mandrione, Alveo S. Egidio (Pomini).

Hister sinuatus Illig. - Mattinata, Cagnano Varano, Alveo S. Egidio (Pomini).

Epierus comptus Er. - Umbra (Pomini).

Paromalus flavicornis Herbst. - Umbra (Pomini).

* *Saprinus dimidiatus* Illig. - Un solo esemplare con etichetta « Umbra, settembre 1940 », ma raccolto certamente in qualche stazione di spiaggia marina sabbiosa (Pomini).

SCARABAEOIDEA

Lucanidae

* *Lucanus tetraodon* Thunb. - Ginestra, Foresta, Yacotenente, alcuni esemplari di ambo i sessi, raccolti da Pomini.

Secondo Porta (1932) si tratta di una specie propria dell'Italia meridionale e centrale, della Sicilia e della Sardegna, la quale viene a contatto con il *cervus* L. nell'Umbria e nel Lazio.

Sembra dunque che il *tetraodon* ed il *cervus*, in Italia, sieno forme vicarianti. Ma si tratta veramente di una specie propria? I miei esemplari del Gargano, dell'Aspromonte e dell'Abruzzo (Cerchio) sono puri *tetraodon*. Ma alcuni esemplari di Caprarola (presso Viterbo) rappresentano un evidente passaggio al *cervus*, per quanto riguarda la dentatura delle mandibole del maschio.

Io credo che tutto il genere *Lucanus* sia degno di ulteriore studio e particolarmente il *tetraodon* Thunb. il quale secondo gli autori, si troverebbe anche nella Grecia e nella Albania. Se ciò risultasse vero, allora bisognerebbe considerare la forma dal punto di vista transadriatico.

Dell'Albania (Elbassan, Tomor) ho veduto soltanto il *cervus* L.

Dorcus parallelopipedus L. - Valle d'Umbra, Umbra, Ginestra, Varano (Ghigi, Pomini).

Scarabaeidae

Scarabaeus affinis (Brullé) Müll. – Cagnano Varano (Pomini). Segnalato della stessa località da Holdhaus (1911) con il nome di *sacer* L.

Scarabaeus variolosus Fabr. – Alveo S. Egidio, Mandrione, Cagnano Varano (Pomini).

Gymnopleurus mopsus Pall. (*pilularius* Reitt.). – Mandrione (Pomini).

Gymnopleurus Sturmi Mac Leay. – Alveo S. Egidio, Mandrione (Pomini).

Sisyphus Schaefferi L. – Mandrione (Pomini).

Bubas bison L. – Mattinata, Cagnano (Pomini).

Oniticellus fulvus Goeze. – Umbra (Pomini).

Caccobius Schreberi L. – Mandrione, Alveo S. Egidio, Umbra (Ghigi, Pomini).

Onthophagus Amyntas Ol. – Mattinata, Yacotenente, Mandrione, alcuni esemplari raccolti da Pomini, tutti appartenenti alla razza tipica della specie, e non alla subsp. *alces* Fabr. della Balcania.

Onthophagus taurus Schreb. – Mattinata (Pomini): razza tipica, non *illyricus* Scop. = *urus* Mén.

Onthophagus grossepunctatus Reitt. – Alveo S. Egidio, Cagnano Varano, Mattinata (Pomini).

* *Onthophagus ruficapillus* Brullé. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Onthophagus fracticornis Preyssl. – Umbra (Pomini).

Onthophagus verticicornis Laich. – Umbra, S. Nicandro (Pomini).

* *Onthophagus maki* Illig. – Cagnano Varano (Pomini).

Onthophagus vacca L. – Mattinata, Cagnano Varano (Pomini).

Geotrupes spiniger Marsh. – Valle d'Umbra, Umbra, Ginestra, Yacotenente, Mattinata (Pomini).

Geotrupes niger Marsh. (= *hypocrita* Serv.). – Valle d'Umbra, Ginestra (Pomini).

Geotrupes pyrenaeus splendens (Heer) Capra. – Umbra, Yacotenente, Ginestra, Varano (Ghigi, Pomini); tutti gli esemplari di colore verde metallico con riflessi purpurei più o meno sviluppati, salvo singoli, vecchi, usurati, nerastri, con la colorazione verde purpurea conservata nella doccia marginale delle elitre.

La stessa forma venne indicata da Holdhaus (1911) di Cagnano, con il nome di *vernalis* L. var. *splendens* Er.

Geotrupes (Thorectes) Brullei (Jek.) Müll. – Alveo S. Egidio (molti esemplari), San Nicandro, Mattinata (Pomini). Indicato da Holdhaus (1911) di S. Angelo e del Lago S. Giovanni con il nome di *intermedius* Costa.

Specie balcanica, descritta della Morea, della quale ho veduto numerosi esemplari di molte località insulari e continentali costiere, e del retroterra, da Salvore, nell'Istria settentrionale, alle isole greche dell'Jonio (Corfù, Cefalonia, Zante). Ho veduto pure un maschio di Caifa (Palestina) e numerosi esemplari della Cirenaica (Gebel: Villaggio Berta). La sua presenza venne segnalata anche nella Algeria, indicazione questa che non ho potuto controllare personalmente.

Le sole località italiane a me note sono quelle suddette del Promontorio Garganico. Si tratta quindi di una entità sistematica prettamente transadriatica.

Aphodius erraticus L. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Aphodius luridus Fabr. – Umbra (Pomini): forma tipica.

* *Aphodius satellitius* Herbst. – Cagnano Varano (Pomini).

Aphodius sticticus Panz. – Umbra (Pomini).

Aphodius merdarius Fabr. – Mattinata (Pomini).

Aphodius fimetarius L. – Mattinata (Pomini).

Aphodius granarius L. – Mattinata (Pomini).

Chaetonyx robustus Schaum.

Le prime stazioni garganiche di questa specie vennero scoperte da Holdhaus (1911), il quale la raccolse nelle parti più alte della Valle Ceresaldo, nei boschi di alto fusto, sotto profondi strati di foglie marcescenti, miste a vecchi frammenti di legno; in particolare, ho veduto tre esemplari delle raccolte suddette, con etichette originali di Holdhaus: Bosco Spigno e Monte S. Angelo (in coll. Müller).

Pomini (aprile 1940) raccolse un maschio a Umbra, il quale, da me trovato identico a quelli di Holdhaus, venne da me determinato: *robustus italicus* mihi.

La descrizione di questa razza è comparsa ad opera di GIOVANNI MARIANI in una sua revisione del genere *Chaetonyx* («Mem. Soc. Entom. Ital.», 1946, p. 75).

L'area di diffusione di questa specie, esattamente abbozzata da HOLDHAUS (1911, p. 28) è molto estesa. Essa va dal Mar Nero (Dobrugia, Costantinopoli) all'Albania (Ochrida, Scutari, Valona) all'Albania e quindi all'Adriatico, attraverso alla Ungheria (al nord fino a Budapest), alla Bulgaria, alla Serbia ed alla Grecia settentrionale (stazione più meridionale quella del Monte Veluchi, nella zona alpina, Alfelbeck leg.).

Riprende, oltre all'Adriatico, con le stazioni garganiche suddette e numerose altre stazioni dell'Appennino meridionale e centrale; interessante una stazione insulare (Isola del Giglio): subsp. *italicus* Mariani.

Altra stazione isolata, per ora, quella del Promontorio di Portofino, in Liguria: subsp. *liguricus* Mariani.

Insetti atteri, anoftalmi, terricoli, ipogei, submontani e montani, talvolta anche alpini, ben poco mobili. Un'area così estesa, nettamente transionica, deriva, almeno con tutta probabilità, da una dispersione molto antica.

Le altre due entità sistematiche del genere *Chaetonyx*, alle quali MARIANI attribuisce rango di specie, sono: *Schatzmayri* Mariani, della Macedonia (Keretschkoi, Schatzmayr leg.) e *Binaghii* Mariani del Monte Athos.

Pentodon punctatus Villers. – Mandrione, Alveo S. Egidio, Mattinata (Pomini).

Valgus hemipterus L. – Ginestra (Pomini).

Tropinota squalida Scop. – Mattinata, Umbra, Ginestra, Mandrione, S. Menaio (Pomini).

Epicometis hirta Poda. – Mattinata, Umbra, Ginestra, S. Menaio, Cagnano Varano (Pomini).

Oxythyrea funesta Poda. – Lago Varano, Cagnano Varano, S. Menaio, Mandrione, Umbra, Mattinata (Ghigi, Pomini).

Cetonia aurata hispanica Er. – Ginestra, S. Menaio, Umbra, S. Nicandro, dintorni della Grotta Monte Nero (Pomini).

* *Potosia aeruginosa* Drury. – Sponde del Lago Varano (Ghigi).

Potosia morio Fabr. – Mandrione (Pomini).

DASCILLOIDEA

Helodidae

Cyphon. spec. – Cagnano Varano (Pomini).

Melasidae (Eucnemidae)

* *Farsus dubius* Piller. – Umbra, due esemplari, raccolti da Pomini (Binaghi determ.).

Elateridae (G. Binaghi determ.)

Lacon punctatus Herbst. – Umbra, Pomini leg. (*Adelocera* Auct.).

* *Ampedus praestum* F. – Umbra, Pomini leg. (*Elater* Auct.).

Cardiophorus incanus Er. – Umbra, Ginestra (Pomini).

Cardiophorus cinereus Herbst. – Umbra, Ginestra (Pomini).

Cidnopus pilosus Leske. – Umbra, Bosco Sfilze, Pomini leg. (*Limonius* Auct.).

* *Athous villosus* Fourcr. – Umbra (Pomini).

Athous vittatus F. – Umbra, Ginestra (Pomini). Gli esemplari del Gargano appartengono tutti ad una razza particolare dell'Appennino (Binaghi in litt.).

Athous obscurus Payk. – Umbra, Ginestra (Pomini) Segnalato da Holdhaus (1911) con il nome di *haemorrhoidalis* F. var. *Croissandeaui* Buyss. della località Lo Sfrizzo.

Agriotes infuscatus Desbr. – Umbra (Pomini).

Agrietes lineatus L. – Alveo S. Egidio (Ghigi).

Buprestidae

Perotis lugubris F. – S. Nicandro (Pomini).

Capnodis cariosa Pall. (1). S. Nicandro (Pomini).

Capnodis tenebricosa Ol. (1). – S. Nicandro (Pomini).

Ptosima 11-maculata Herbst. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Anthaxia hungarica Scop. – Ginestra, una femmina (Pomini).

* *Anthaxia Midas* Kiesw. – Ginestra, una serie di 11 esemplari; lunghezza del corpo variabile da mm. 7 a mm. 8,5 (Pomini).

La determinazione va riveduta dato che io, attualmente, non ho alcun mezzo utile per decidere se la popolazione garganica appartenga alla forma tipica della specie (Francia meridionale, Sardegna, Sicilia, Tangeri) oppure alla subsp. *Mülleri* Obenb., descritta inizialmente secondo esemplari dell'Istria (ex Reitter) ma indicata poi dallo stesso Obenberger della « Italia orientale boreale », dell'Istria della Dalmazia e, con dubbio, anche dell'Austria.

* *Anthaxia salicis* F. – Ginestra, Umbra, Bosco Sfilze (Pomini).

Anthaxia grammica Lap. – Ginestra, Bosco Sfilze (Pomini).

---

(1) Le *Capnodis*, almeno a giudicare dal «Catalogo» di Obenberger (1926) sono tutte orientali. Difatti delle 18 specie note allora, soltanto due (*tenebricosa* Ol. e *tenebrionis* L.) hanno invaso tutto il Mediterraneo, fino al Marocco ed al Portogallo.

La *cariosa* Pall. sale al nord sino alla Moravia e sembra essere presente in gran parte dell'Italia, in Sicilia ed all'Elba; essa non ha però raggiunto nè la Francia meridionale e la Corsica, nè la Sardegna ed inoltre non venne mai indicata nell'Africa settentrionale.

Quindi ambedue le specie suddette sono di origine orientale o forse la *cariosa* potrebbe rappresentare un elemento transadriatico, in senso lato.

* ***Acmaeodera ottomana*** Friv. – Umbra, due esemplari raccolti da Pomini nell'aprile del 1940.

La diffusione di questa specie, intesa sensu Kerremans, interessa la Balcania meridionale, la Turchia, le isole dell'Egeo, l'Asia Minore, Cipro, la Siria e la Palestina; sono poi note alcune stazioni nella « Tripolitania » e nell' « Algeria » (vedi Gridelli 1930).

Koch (1939 e 1940) ha colorato in nero tutte queste regioni nella sua carta di diffusione della specie, non menzionando in alcun modo la Tripolitania e l'Algeria (indicazioni queste che io ritengo molto dubbie), nè le indicazioni « Italia » ed « Italia boreale » che affiorano nella letteratura, e nemmeno ha preso in considerazione l'opinione di Obenberger (1924) secondo il quale la *ottomana* comprenderebbe due specie: *ottomana* Friv.: Turchia, Asia Minore, Grecia, Cipro, Siria, Palestina; *quadrizona* Ab.: Algeria, Italia bor., Bulgaria, Turchia, Grecia e Corfù (ab. *corcyrea* Obenb.).

Io ho confrontato i due esemplari del Gargano con tre del Barca (Barce) ed uno del Monte Athos [1], rilevando una notevole variabilità cromatica, alla quale ho già accennato nel 1930 (è opportuno notare che negli esemplari del Gargano le fasce rosse delle elitre sono tre) ma senza essere in grado di riconoscere in essi le due specie separate da Obenberger.

La cosa va quindi riesaminata, alla scorta di materiale sufficiente. Se le specie sono realmente due è per lo meno molto probabile che gli esemplari del Gargano appartengano alla *quadrizona* (Ab.) Obenb.

Ma comunque sia, si tratta in tutti i casi di un elemento transadriatico meridionale, o meglio transionico, a meno che non si voglia pensare ad un trasporto passivo mediante legna.

CANTHAROIDEA

Drilidae

Drilus flavescens Geoffr. – Ginestra, un maschio (Pomini).

---

(1) Sui legni secchi nei pressi di Panteleimon, convento russo sul Monte Athos Macedonia, maggio 1908 (Schatzmayr, « Natura », XXXVI, 1945, p. 46).

Cantharididae

* *Cantharis fusca* L. - Alveo S. Egidio, una serie di 27 esemplari, tutti con pronoto concolore, privo della caratteristica macchia nera.

Si tratta quindi di quella forma che Laporte de Castelnau descrisse con il nome di *immaculicollis*, secondo esemplari di Versailles, la quale compare quà e là, sporadicamente, nelle popolazioni settentrionali, mentre sul Gargano sembra essere la sola forma esistente. Leoni la ha raccolta anche a Lavello (Basilicata) ed a Palagiano (Puglia).

* *Cantharis rustica* Fall. - Bosco Umbra, Ginestra (Pomini).

I pochi individui raccolti hanno zampe nere (tarsi compresi), con la colorazione giallo-rossiccia limitata ad una piccola macchia allungata sulla parte prossimale della faccia estensoria dei femori medi e posteriori ed una macchia maggiore sulla parte prossimale della faccia esterna (posteriore) dei femori anteriori.

Ho veduto singoli esemplari con melanismo egualmente accentuato delle zampe provenienti sia dai dintorni di Trieste, sia dall'Albania settentrionale (Okol di Theti), raccolti insieme a molti altri a femori rossi, con la colorazione nera limitata all'estremo tratto distale.

Cantharis livida L. - Un gruppo di 133 individui, raccolti tutti a Cagnano Varano nel maggio 1940 (due soli provengono dall'Alveo S. Egidio).

Tutti hanno le elitre largamente infoscate all'apice, al massimo fino ad un terzo della lunghezza, e corrispondono in parte (107 individui) alla forma *Varendorffi* Reitt. (capo concolore) ed in parte alla forma *adusta* Reitt. (capo con macchia nera tra gli occhi).

Holdhaus la cita pure, numerosa, nella Costa di Manfredonia, con il nome di *bicolorata* Rey (colorazione nera delle elitre ridotta ad uno stretto margine apicale; fronte con o senza macchia mediana; zampe posteriori e medie più o meno estesamente nere), ossia la *sicula* Bourg. che si trova nella Sicilia. La conosco di Isnello, ove Carlo Lona la raccolse nel maggio 1937. La colorazione nera delle elitre è

davvero notevolmente ridotta in confronto a quella degli esemplari del Gargano.

Cantharis lateralis L. - Alveo S. Egidio, pochi esemplari (Pomini).

Rhagonycha fulva Scop. - Mandrione, S. Nicandro, Alveo S. Egidio (Pomini).

Rhagonycha femoralis Brullé. - Umbra (Pomini), 65 esemplari.

Rhagonycha lignosa Müll. - Ginestra, Umbra, Mandrione (Pomini), serie molto omogenea: elitre, zampe e palpi concolori, giallo paglierino; antenne nerastre con la parte prossimale più o meno estesamente gialla.

Pygidia sicula Mars. - Umbra (Pomini).

CLEROIDEA

Malachidae

Malachius lusitanicus Er. - Ginestra, Umbra (Pomini).

Complessivamente 88 individui, dei quali 76 hanno il pronoto metallico concolore (var. *australis* Muls. Rey) mentre in 12 il pronoto presenta un margine giallo, molto sottile, in corrispondenza agli angoli anteriori (passaggi alla forma tipica, la quale manca sul Gargano).

* *Malachius viridis* F. - Ginestra, Umbra (Pomini).

Malachius brevispina Kiesw. - San Nicandro, Mandrione, Alveo S. Egidio (Pomini). Holdhaus l'ha trovato frequente ovunque sul Gargano e lo ha indicato come *spinipennis* var. *brevispina* Muls. Rey.

Malachius elegans Ol. - Ginestra (Pomini). Forma tipica.

Malachius geniculatus Germ. - Alveo S. Egidio, Ginestra (Pomini).

Malachius parilis Er. - Alveo S. Egidio, S. Nicandro (Pomini).

Cyrtosus ovalis Lap. - Ginestra (Pomini).

* *Henicopus pilosus* Scop. - San Nicandro, Mandrione, 14 maschi e 14 femmine (Pomini).

* *Divales bipustulatus* F. - Ginestra (Pomini).

Dasytes aeneiventris Küs. - Ginestra, Umbra (Pomini).

* *Dasytes plumbeus* (Müll.) Schilsky (= *flavipes* F., nec Ol.). - Umbra, 14 maschi ed 8 femmine.

Anche anteriori giallo-brune, con la faccia esterna in parte infoscata; troncateri gialli; femori neri; tibie gialle oppure più o meno infoscate (e ciò nella maggior parte degli individui); tarsi leggermente infoscati. Secondo articolo delle antenne gialle.

In due maschi e due femmine il melanismo è ancora più spinto, ossia le parti suddette gialle sono bruno-nerastre, compreso il secondo articolo delle antenne. Però le anche delle zampe anteriori sono sempre gialle.

Il tutto dovrebbe corrispondere alla var. *nigrofemoralis* Schilsky.

Sembra che questa forma melanica sia la sola presente sul Gargano.

Obs. Holdhaus (1911) ha trovato sul Gargano, in numerose località non indicate dettagliatamente, il *Dasytes flavipes* Ol., estremamente simile al *plumbeus*, ma con le anche anteriori nere.

Psilothryx cyaneus Oliv. - Umbra, Mandrione, Ginestra, Mattinata, Alveo S. Egidio, San Menaio (Pomini), molto frequente.

Secondo Pic (Catal. Junk) *Psilothryx* Redt. 1858 sarebbe identico a *Lasius* Motsch. 1845.

Psilothryx aureolus Schilsky. - Umbra, Ginestra (Pomini), frequentissimo.

Dolichosoma simile Brullé.

Specie descritta della Grecia, della quale il Museo di Trieste possiede esemplari del Monte Athos (Schatzmayr leg.) e di Coo. Müller ha indicato la sua presenza in Dalmazia, a Zemonico presso Zara.

Già nota a Holdhaus (1911) essa venne pure trovata da Pomini, presso San Nicandro.

Luigioni (Catalogo) l'ha indicata del Lazio, della Puglia, della Basilicata e della Sicilia. Secondo Porta essa sarebbe presente anche a Meleda ed a Lesina (ma si tratta di un errore di copiatura dalla nota

suddetta del Müller: «Münchn. Koleopt. Zeitschr.», II, 1904, p. 318), nonchè nella Sardegna (ma tale indicazione esige conferma).

Danacaea aurichalcea Küster. – Umbra, Ginestra, Alveo S. Egidio (Pomini): forma tipica (Procházka «Bestimm. – Tab. XXX, 1894, pag. 28».

Obs.: Pomini ha raccolto inoltre a Umbra ed all'Alveo S. Egidio esemplari appartenenti ad altre due specie per ora non determinabili.

Cleridae

Trichodes alvearius F. – Ginestra, Mandrione, San Menaio, Cagnano Varano, Alveo S. Egidio (Pomini), frequente.

Dermestidae

Dermestes Frischi Kug. – Alveo S. Egidio (Pomini).

Dermestes ater Oliv. – Ginestra, due esemplari (Pomini).

Bostrychidae

* *Bostrychus capucinus* L. – Cagnano Varano (Pomini).

Anobiidae

Lasioderma haemorrhoidalis Illig. – Ginestra, un esemplare, confrontato con altri di Lesina e Zara della collez. Müller.

CUCUJOIDEA

Nitidulidae

Meligethes umbrosus Sturm. – Ginestra (Pomini).

Meligethes rufipes Gyllh. – Umbra (Pomini).

Meligethes aeneus F. – Ginestra, S. Menaio, Alveo S. Egidio (Pomini).

Meligethes viridescens F. – Umbra (Pomini).

Cucujidae

Uleiota planata L. – Foresta Umbra, frequente (Pomini).

Phalacridae

Phalacrus coruscus Panz. – S. Menaio (Pomini). Citato da Holdhaus (1911) con il nome *fimetarius* F.

Olibrus liquidus Er. – Mandrione (Pomini).

Olibrus affinis Strm. – Umbra, Ginestra (Pomini)

Colydiidae

Ditoma crenata F. – Foresta Umbra (Pomini).

Cerylon semistriatum Perr. – Foresta Umbra, un esemplare, raccolto da Pomini (G. Müller determ.).

Coccinellidae

Epilachna chrysomelina F. – Cagnano Varano (Pomini).

Subcoccinella vigintiquatuorpunctata L. – Umbra, Ginestra (Pomini).

Rhizobius litura F. – Umbra (Pomini).

Clithostetus arcuatus Rossi. – Umbra (Pomini). Determ. G. Müller).

Scymnus Apetzi Muls. – Ginestra, Pomini leg. (Determ. G. Müller).

Nephus quadrimaculatus Hbst. (*pulchellus* Hbst.). – Umbra (Pomini).

* *Hyperaspis campestris* Herbst. – Umbra (Pomini).

Adonia variegata Goeze. – Alveo S. Egidio: forma tipica (*carpini* Geoffr.) e ab. *constellata* Laich. (Ghigi).

* *Semiadalia undecimnotata* Schneid. - Mandrione, Umbra (Ghigi, Pomini).

Coccinella septempunctata L. - Mandrione, Cagnano Varano, Ginestra, Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

Coccinula quatuordecimpustulata L. - San Menaio, Umbra. Yacotenente (Pomini).

Propylaea quatuordecimpunctata L. - Umbra: ab. *12 - pustulata* Pont. (= *fimbriata* Sulz.) Ghigi leg. (Capra determ.)

Thea vigintiduopunctata L. - San Menaio, Umbra (Pomini).

* *Exochomus quadripustulatus* L. - San Menaio, Cagnano Varano, Umbra (Pomini).

Anthicidae

Formicomus pedestris Rossi. - San Nicandro (Pomini).

Mordellidae (Mario Franciscolo determin.)

Mordella bipunctata Germ. - Ginestra (Pomini).

* *Mordella sulcicauda* Muls. - Ginestra, Umbra (Pomini).

* *Mordella fasciata* Fabr. - Ginestra, diversi esemplari (Pomini): ab. *interrupta* Costa, *coronata* Costa, *briantea* Comolli.

Mordella aculeata L. - Ginestra (Pomini).

* *Mordella leucaspis* Küst. - Ginestra (Pomini): var. *vestita* Emery.

* *Mordella argyropleura* Franciscolo. - Ginestra, un esemplare (Pomini).

Tale forma, descritta dell'Isola di Capraia, la posseggo anche di varie località dell'Italia centro-meridionale, e la raccolsi io stesso lungo il fiume Biferno, nel luglio 1944, presso Guglionesi (Prov. Campobasso). Non la raccolsi però sul Gargano; il reperto è estremamente interessante (Franciscolo, in litteris).

Mordellistena episternalis Muls. - Umbra, Alveo S. Egidio (Pomini).

Mordellistena brevicauda Boh. - Ginestra, Umbra (Pomini).

Mordellistena micans Germ. - Dei 5 esemplari raccolti da Pomini a Umbra uno appartiene alla forma tipica della specie e gli altri quattro alla forma *Perroudi* Muls.

Mordellistena pumila Gyllh. - Ginestra, Umbra (Pomini).

Anaspididae (Mario Franciscolo determ.).

Anaspis brunnipes Muls. - Umbra (Pomini).

Anaspis varians Muls. - Umbra (Pomini).

* *Anaspis Costae* Emery. - Umbra (Pomini).

* *Anaspis rufilabris* Gyllh. - Umbra (Pomini).

Anaspis pulicaria Costa. - Umbra, frequentissima; Ginestra (Pomini).

Anaspis nigripes Chaud. Bris. - Umbra (Pomini).

Anaspis ruficollis Fabr. - Umbra (Pomini).

Anaspis maculata Geoffr. - Mattinata; Umbra, frequentissima (Pomini).

Meloidae

Mylabris variabilis Pallas. - Bosco Ginestra, Yacotenente, Mandrione (Pomini).

La maggior parte (92 esemplari) vennero raccolti nel Bosco Ginestra. Questa popolazione, a giudicare dalla serie esaminata, è molto omogenea. Difatti in tutta la fascia nera postmediana è integra, indivisa. In 62 individui la fascia nera anteriore è completa, con colorazione nera talora estesa in modo da includere una macchia rossa su ciascuna elitra; in altri si nota invece una tendenza alla riduzione ossia si nota una tendenza più o meno spinta alla divisione della fascia stessa.

In altri 28 individui tale divisione è completa: su ciascuna elitra si notano due macchie anteriori separate (le due suturali fuse in un complesso unico, cordiforme). Ed infine in due esemplari soltanto la divisione è più spinta ancora e le quattro macchie risultanti sono piccole ed isolate.

Nessun esemplare ha la fascia postmediana divisa e mancano pure esemplari a colorazione nera molto ridotta.

Meloe violaceus Marsh. - Due femmine di Umbra ed una dell'Alveo S. Egidio (Pomini leg.), pur appartenendo a questa specie, mostrano tali differenze di forma e punteggiatura del pronoto, scultura delle elitre e sculture delle aree dorsali dei tergiti addominali, da rendermi molto perplesso.

Non dispongo attualmente di altro materiale dell'Italia meridionale e della Sicilia e quindi non posso dire se si tratti o no della forma *siculus* Baudi che Dodero (in litteris) riteneva fosse una razza meridionale del *violaceus*, e nemmeno esprimermi sulla realtà della separazione specifica del *violaceus* Marsh. e *proscarabaeus* L., messa in dubbio, e forse non a torto, da Leoni.

Zonitis immaculata Ol. - Mandrione (Pomini).

Oedemeridae (determin. M. Magistretti)

Asclera coerulea L. (determ. Gridelli). - Umbra (Pomini).

Oedemera flavipes F. - Ginestra, Mandrione, Umbra, Bosco Sfilze, Alveo S. Egidio, S. Nicandro (Pomini).

Oedemera podagrariae L. - San Nicandro (Pomini).

* *Oedemera atrata* Schmidt. - Umbra, forma tipica; Ginestra, forma tipica e ab. *Luigionii* Schatzm. (Pomini).

Oedemera nobilis Scop. - Sponde Varano, Mandrione, Ginestra, Umbra (Ghigi, Pomini).

* *Oedemera lurida* Marsh. - Sponde Varano, Ginestra, Umbra (Ghigi, Pomini).

Oedemera brevicollis W. Schmidt. - Umbra, S. Nicandro, due esemplari della ab. *tibialis* Luc. (Ghigi, Pomini).

Salpingidae

* *Mycterus umbellatarum* F. - Mandrione (Pomini): var. *siculus* Baudi.

Pyrochroidae

Pyrochroa serraticornis Scop. - Bosco Sfilze (Pomini).

Lagridae

Lagria hirta L. - Ginestra, Mandrione, Umbra (Pomini).

Alleculidae

Gonodera luperus Herbst. - Il solo esemplare raccolto da Pomini appartiene alla var. *ferruginea* Fabr. e differisce alquanto da quelli a me noti di altre stazioni per la punteggiatura degli intervalli delle elitre meno rada. Non credo che si possa pensare alla *bicolor* Reitt., della Grecia.

Gonodera metallica Küster. - Ginestra e Umbra (Pomini).

Isomira testacea Seidl. - Umbra, Ginestra, Alveo S. Egidio (Pomini).

Si tratta, almeno con grande probabilità, di un elemento transadriatico.

Podonta italica Baudi. - Una serie di esemplari raccolti da Pomini a Mandrione. Frequente pure a Cagnano (Hilf leg., teste Holdhaus 1911).

Le *Podonta* sono tutte molto simili e nulla si sa di preciso le affinità tra le varie specie. La diffusione orientale di ben 27 di esse (su 28 note nel 1910), la presenza di una sola specie in Italia (la *italica*), la loro assenza nell'Europa media centrale ed occidentale e nel Mediterraneo tirrenico, europeo ed africano, unite alla netta differenziazione specifica rispetto alle specie di oltre Adriatico, permettono di vedere nella *Podonta italica* un elemento transadriatico di origine antica.

* *Omophlus lepturoides* Favr. - Dintorni della Grotta di Monte Nero, Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Omophlus dispar* Costa. - Alveo S. Egidio (Pomini) una femmina.

Con probabilità elemento transadriatico. Certamente però le specie del genere, nella loro stragrande maggioranza, presentano una diffusione attuale orientale.

Megischia curvipes Brullé. - Dintorni della Grotta di Monte Nero (Pomini).

Tenebrionidae

* ***Erodius siculus dalmatinus*** Kraatz. - Isola di Varano (Pomini).

Considerato elemento transadriatico da Müller (1921). Appartengono a questa razza tutte le popolazioni scaglionate lungo la riva adriatica, da Capo Leuca a Porto Corsini (in tutta prossimità delle lagune di Comacchio). Tipico psammobionte, che compare, quasi sempre lungo le rive marine sabbiose. Manca totalmente lungo le spiagge venete e friulane, nonchè nelle zone dell'Adriatico settentrionale che potrebbero offrirgli il terreno sabbioso adatto, come ad esempio le sabbie delle isole di Sansego, Canidole, Lussino, Arbe, nonchè quelle di varie spiagge dell'Istria meridionale. Compare nuovamente in Dalmazia, in singole stazioni isolate, come le dune costiere dell'isola di Curzola, in località Lombarda, ed in terreni sabbiosi dei vigneti dell'isola di Lissa, in località Zlopolje (Müller 1921), a circa 200 metri sul livello marino. Questo reperto dimostra che si tratta di un psammobionte, probabilmente termofilo e non di un insetto legato a terreni salmastri.

Presente pure lungo le spiagge albanesi, a Valona ed a Durazzo, nonchè nell'isola di Corfù.

La razza tipica della specie compare in Sicilia. In singole zone della stessa Sicilia e lungo tutto il litorale tirrenico, dalla Calabria al Lazio (Maccarese) troviamo invece il *siculus neapolitanus* Sol., razza ad elitre tricostate.

La specie è assente sia lungo le spiagge toscane e liguri, come pure nel resto nel Mediterraneo occidentale, europeo ed africano, comprese la Corsica e la Sardegna.

Trattasi secondo me di un elemento di provenienza africana. La specie africana più affine è quella che Reitter ha denominato *nitidicollis* Sol. Nulla di simile esiste nella Balcania e nel Mediterraneo orientale.

La Corsica non possiede alcun *Erodius*, fatto questo molto curioso. Nella Sardegna troviamo invece l'*Erodius Peirolerii* Sol. razza dell'*Erodius Emondi* Sol., diffuso lungo le coste mediterranee della Tunisia, Algeria, Marocco, Spagna meridionale ed isole Baleari. Così ad esempio molti esemplari delle Baleari si possono distinguere dai *Peirolerii* di Sardegna soltanto leggendo i cartellini di località.

Tentyria italica Sol. - Isola di Varano (Pomini).

Specie largamente diffusa nell'Italia meridionale e centrale, sia tirrenica che adriatica. A giudicare dai reperti dei quali dispongo la stazione continentale più settentrionale tirrenica è data da Corneto (Toscana) e quella adriatica sembra essere appunto l'Isola di Varano, alla sponda settentrionale del Promontorio garganico; abbondantissima, specialmente in Puglia, essa compare sia lungo le coste che in località interne, anche a notevole altezza sul mare. Manca nella Sicilia, nella Sardegna e nella Corsica ed in tutto il Mediterraneo occidentale, sia europeo che africano. Si trova soltanto nell'isola del Giglio ed io ho pure veduto esemplari indicati come provenienti dall'Elba (Capo Calamita). Ma tale stazione esige conferma dato che Holdhaus (« Mem. Soc. Ent. Ital. », II, 1923, p. 105) non cita la *Tent. italica* tra i tenebrionidi dell'Elba.

Nell'Adriatico essa è presente alle Tremiti ed alle Pelagose, nonchè nella maggior parte delle isole e degli scogli della Dalmazia centrale e si trova pure in alcune località costiere continentali dalmate, da Bevilaqua presso Nona (località più settentrionale) a Budua, nella Dalmazia meridionale. Vedi in proposito notizie dettagliate in Müller (« Verh. zool.-bot. Gesellsch. », Wien, 1921, p. 172).

Venne affermata pure la sua presenza a Corfù (Reitter, « Verhandl. naturf. Verein Brünn », XXXIX, 1900, p. 175). Ma Koch espresse recentemente l'opinione che tale reperto fosse derivato da un errore di determinazione; la *italica* Sol. di Corfù sarebbe identica alla sua *rotundata jonica* (vedi Koch, « Mitteil. Münchn. Entom. Gesellsch. », XXXIV, 1948, p. 313).

Si tratta certamente di un elemento transadriatico, opinione questa già espressa da Müller. Ma l'area di diffusione è davvero curiosa e richiede ulteriori studi, specialmente per quanto riguarda l'eventuale affinità della *italica* con qualche specie del Mediterraneo orientale meridionale.

Blaps gibba Cast. - Alveo S. Egidio, Mandrione, Ginestra, Cagnano Varano (Pomini).

Dendarus dalmatinus Germ. - San Nicandro, Cagnano Varano, Ginestra, Yacotenente (Pomini).

Tipico elemento faunistico transadriatico, presente lungo la costa dell'Adriatico orientale, e nel retroterra della stessa, da Trieste fino a Corfù e Cefalonia. Presente sulla maggior parte delle isole adriatiche esso è frequente in varie stazioni del Promontorio del Gargano, e sulle isole Tremiti, in esemplari identici a quelli della opposta sponda.

Invece le popolazioni di questa specie presenti in Puglia sono formate da esemplari a caratteri sessuali ridotti: incisione preapicale del margine flessorio apparente delle protibie maschili con sinuosità preapicale meno profonda, non limitata prossimalmente da un angolo vivo.

Ed infine noi troviamo nell'Italia tirrenica, e precisamente nel Lazio, nella Campania, nella Calabria e nella Sicilia il *Dendarus lugens* Muls., con la sinuosità suddetta delle protibie maschili ancora più ridotta, poco evidente.

Nulla di simile esiste nel resto del Mediterraneo occidentale e nella Corsica e Sardegna. Varie specie affini nel Mediterraneo orientale.

Pedinus meridianus Muls. - Alveo S. Egidio, Mattinata, Varano (Ghigi, Pomini).

Francia meridionale, dal Rodano a Hyères; Italia continentale tirrenica tutta; Gorgona, Capraia, Elba, Giglio, Corsica, Sardegna; la presenza della specie in Sicilia è dubbia. Italia adriatica: numerose stazioni della Puglia e del Gargano, Tremiti, Pianosa. Le sole stazioni note dell'Adriatico orientale (tutto, Venezia Giulia compresa) sono: Pelagosa Grande, Pelagosa Piccola, Cazza, S. Andrea, Brusje, Lesina, ossia isole e scogli della Dalmazia meridionale.

Opatrum sabulosum subdilatatum Reitt. -- Alveo S. Egidio, Cagnano Varano, Mattinata (Pomini).

Gonocephalum pusillum Fabr. - Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Bolitophagus reticulatus* L. - Foresta Umbra (Pomini).

* *Uloma culinaris* L. - Foresta Umbra (Ghigi).

* *Neatus noctivagus* Muls. - Foresta Umbra (Pomini).

Descritto dal Mulsant secondo esemplari provenienti da una località non precisata della Sicilia, ove non sembra essere raro. La struttura del fallo permette una sicura differenziazione dal *picipes* Herbst. È molto affine, e forse non specificamente diverso, al *Neatus subaequalis* descritto dal Reitter secondo esemplari di Scutari d'Albania. Io possiedo tre esemplari, trovati presso Kruia (Albania, a Ura Zezë, Dott. E. Stolfa leg.). Secondo Reitter il *subaequalis* si troverebbe pure nel lontano Caucaso (Daghestan, Lenkoran) ma io credo che questi reperti abbisognino di conferma.

Enoplopus dentipes Rossi. - Foresta Umbra, Bosco Ginestra, Yacotenente (Ghigi, Pomini).

* *Anteros coeruleus* L. - Foresta Umbra (Pomini).

Cylindronotus (Odocnemis) exaratus Germ. - San Nicandro, un maschio raccolto da Pomini.

Ho veduto un secondo esemplare di una località non precisata del Gargano, in coll. Burlini.

Specie balcanica, diffusa e frequente sulle coste dell'Adriatico orientale (anche in stazioni continentali interne), dalla Grecia al nord fino a Gorizia. Le stazioni garganiche (Holdhaus 1911: S. Angelo, Lo Sfrizzo, Costa di Manfredonia) sono le sole stazioni italiane a me note, oltre a quelle della Venezia Giulia.

PHYTOPHAGOIDEA

Cerambycidae

* *Prionus coriarius* L. - Foresta Umbra, Bosco Ginestra (Pomini).

* *Aegosoma scabricorne* Scop. - Foresta Umbra (Pomini).

* *Vesperus luridus* Rossi. - Ginestra, settembre 1940, tre maschi (Pomini).

Acmaeops collaris L. - Ginestra (Pomini).

Grammoptera ruficornis Fabr. - Umbra, Bosco Sfilze (Pomini).

* *Alosterna tabacicolor* De Geer. - Bosco Sfilze (Pomini).

Strangalia bifasciata Müll. - Mandrione (Pomini).

Stenopterus rufus L. - Mandrione (Pomini).

* *Deilus fugax* Ol. - Bosco Ginestra (Pomini).

Cerambyx Scopolii Fuessl. - Bosco Ginestra (Pomini).

* *Clytus siculus* Wagner. - Riferisco a questa specie diversi esemplari raccolti da Pomini presso San Nicandro e Mandrione, e credo appartengano ad essa anche gli esemplari raccolti da Holdhaus a Varano e presso Manfredonia, da lui citati (1911) come *rhamni* Germ.

Wagner ha descritto questa specie secondo esemplari di Siracusa e dei Monti Rossi presso Nicolosi (« Koleopt. Rundsch. », II, 1927, p. 95) asserendo che essa è molto affine all'*arietis* L.

Per me si tratta di una entità sistematica estremamente affine al *rhamni* Germ.

* *Clytus clavicornis* Reiche. - Bosco Ginestra, maggio 1940, leg. Pomini. Sicilia: Monte Sori, nei Nebrodi, un esemplare, Lona leg. maggio 1937.

Chlorophorus sartor F. Müll. - Mandrione, Ginestra (Pomini).

Morimus asper Sulz. - Ginestra, Umbra, Bosco Sfilze (Pomini).

Dorcatypus tristis L. - Bosco Sfilze (Pomini).

Dorcadion etruscum Rossi. - Alveo S. Egidio, 14 esemplari (Pomini).

Specie largamente diffusa nell'Italia meridionale e centrale, presente pure in alcune stazioni padane (Bologna, Cremona) ed in una stazione siciliana (Ficuzza). Depoli ha tentato di studiare le sue così dette razze del *Dorcadion femoratum* Brullé, ossia dell'*etruscum* Rossi, in una memoria pubblicata nel 1926 (« Mem. Soc. Entom. Ital. », V, p. 10) la quale non merita di essere discussa.

La specie è presente, secondo tutti gli autori, nell'Albania e nella Grecia. Brullé ha descritto appunto il suo *femoratum* nel 1832: « Exped. scient. Morée Ins. », p. 259, t. 43, f. 2. La presenza della specie in Albania è affermata da Chevrolat, il quale descrisse dell'« Albanie » il suo *Dorcadion fuscifrons*, da Holdhaus (1911: Valona) e da Pic (1917: Longic. X, 2, p. 6: ab. *valonensis* Pic).

Non ho mai veduto esemplari albanesi e greci e quindi non posso controllare l'opinione di tutti gli autori che, concordemente, accettano l'identità specifica delle forme *etruscum* Rossi, *femoratum* Brullé e *fuscifrons* Chevr. Anche Holdhaus (1911) ritiene trattarsi di una specie a diffusione transadriatica. *Dorcadion etruscum* (Rossi) descritto nel 1790, ha priorità su *femoratum* Brullé, descritto nel 1832.

Dorcadion arenarium Scop. - Cagnano, una femmina (Pomini) appartenente alla sbsp. *subcarinatum* J. Müll.

Calamobius filum Rossi. - Umbra, Ginestra (Pomini).

Agapanthia cardui L. - Mandrione (Pomini).

* *Phytoecia cylindrica* L. - Un esemplare di sesso maschile: raccolto a Umbra (Pomini).

Phytoecia rufimana Schrk. - Mandrione (Pomini).

Chrysomelidae (Sandro Ruffo determ.)

Macrolenes bimaculata Rossi. - S. Nicandro (Pomini). Holdhaus 1911: *dentipes* Cl., Costa di Manfredonia.

Chilotoma musciformis Goeze. - Umbra (Pomini).

Cryptocephalus rugicollis Ol. - Alveo S. Egidio e Mandrione: ab. *humeralis* Ol. e *sexnotatus* Fabr. (Pomini).

* *Cryptocephalus macellus* Suffr. - Umbra (Pomini).

* *Cryptocephalus fulvus* Goeze. - Ginestra (Pomini): un esemplare della ab. *Weiseanus* Breit.

Cryptocephalus hypochoeridis Suffr. - Umbra (Ghigi). Holdhaus 1911: *cristula insulipennis* Suffr.

Timarcha nicaeensis Villa. - Cagnano Varano (Pomini).

Chrysomela rossia Illig. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Chrysomela vernalis Brullé. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Chrysomela Banksi Fabr. - Bosco Sfilze (Pomini).

* *Chrysomela menthastri* Suffr. - Valle d'Umbra, Umbra, Ginestra, Mandrione, Alveo S. Egidio (Ghigi, Pomini).

Chrysomela grossa Fabr. - San Nicandro, Cagnano Varano, Umbra, Valle d'Umbra, Alveo S. Egidio, Ginestra, Mattinata (Pomini).

Largamente diffusa nel Mediterraneo occidentale, europeo ed africano (Deville non la cita tra le specie della Corsica), diffusa nella Francia meridionale e nella Italia tirrenica, Sicilia compresa. Venne pure segnalata di qualche stazione del Trentino meridionale (Gredler).

Presente nell'Adriatico orientale, sulle isole di Lussino (ove l'ho pure raccolta personalmente) di Lissa e Lesina, nonchè a Sebenico (Müller determ., in coll.). [*Gridelli*].

Chrysomela lutea Petagna. – San Nicandro, Valle d'Umbra (Pomini).

La specie era conosciuta finora soltanto della Sicilia e dell'Italia meridionale e centrale. Egone Stolfa l'ha raccolta nell'Albania meridionale, a Llogara, nel 1939 (Museo di Trieste, Müller determ.). *Gridelli.*

* *Phyllodecta vitellinae* L. – Umbra (Pomini).

* *Plagiodera versicolora* Laich. – Umbra (Pomini).

* *Melasoma populi* L. – Sponde del Lago Varano (Ghigi). Gridelli determ.

Exosoma lusitanicum L. – San Nicandro, Mandrione, Alveo S. Egidio (Pomini).

Lochmaea crataegi Först. – Umbra (Pomini).

Longitarsus succineus Foudr. – Ginestra (Pomini).

* *Longitarsus Foudrasi* Weise. – Alveo S. Egidio, Ghigi (Springer determ.).

Sphaeroderma rubidum Graells. – Umbra, Pomini (Springer determ.).

Lariidae (Müller determ.: *Hoffmann*, Faune de France)

Spermophagus sericeus Geoffr. – Ginestra, Umbra (Pomini).

Laria laticollis Boh. – Ginestra, Umbra (Pomini).

Laria tristicula Fährs. – Ginestra (Pomini).

Laria viciae Ol. – Ginestra, Umbra (Pomini).

Laria luteicornis Ill. – Ginestra, Umbra (Pomini).

Bruchidius marginalis Fabr. – Umbra (Pomini).

Bruchidius unicolor Ol. – Umbra, San Menaio (Pomini) (*cisti* Baudi, Bedel).

Bruchidius bimaculatus Ol. – Umbra (Pomini).

Bruchidius murinus Fabr. – Umbra, Ginestra (Pomini).

Bruchidius foveolatus Gyllh. – Umbra, Ginestra (Pomini).

Bruchidius tibialis Boh. - Umbra (Pomini).

Bruchidius dispar Gyllh. - Umbra, Ginestra (Pomini).

Bruchidius perparvulus Boh. - Ginestra, Pomini (*pygmaeus* Boh. Baudi).

* *Bruchidius fasciatus* Ol. - Ginestra, Pomini (*cisti* Schilsky; *villosulus* Bedel).

* *Bruchidius basalis* Gyllh. - Ginestra, Pomini (*siculus* Fährs.).

Curculionidae (Ferd. Solari determ.)

Rhynchites tomentosus Gyllh. - Umbra (Pomini).

Rhynchites germanicus Herbst. - Umbra (Pomini).

Rhynchites aequatus L. - Umbra (Pomini).

Attelabus nitens Scop. - Mandrione (Pomini).

Apion violaceum Kirby. - San Menaio (Pomini).

Apion nigritarse Kirby. - Umbra (Pomini).

Apion punctigerum Payk. - Umbra (Pomini).

Apion ervi Kirby. - Ginestra (Pomini).

Apion viciae Payk. - Umbra, Ginestra (Pomini).

Brachycerus undatus F. - S. Menaio (Pomini).

Otiorrhynchus spalatrensis transadriaticus Reitt. (C. Lona determ.). - Umbra (Pomini). Holdhaus 1911: Costa di Manfredonia (S. Angelo, un esemplare in coll. Müller), Lago S. Giovanni, Cagnano; altezza da 400 fino ad 800 metri.

Specie diffusa nella Balcania occidentale montana (Dalmazia media e meridionale, Bosnia, Erzegovina), presente pure nelle montagne della Croazia (Bjela Lasica: *cardinigeroides* Reitt. 1895) e della Liburnia (Monte Rjsniak: *rjsniakensis* Depoli 1937-38; probabilmente identico a *cardonigeroides*!), molto variabile e frazionata in diverse razze che

non mi sembrano ancora perfettamente note, almeno per quanto riguarda la loro diffusione geografica.

Per quanto riguarda le popolazioni garganiche esse vennero dapprima riferite allo *spalatrensis* Boh. (Holdhaus 1911), poi vennero assegnate ad una specie propria, per la quale Reitter (1915) usò il nome datole in litteris da K. Daniel. Come tale venne ritenuta dagli autori successivi, ed anche da Carlo Lona, nel suo recente Catalogo. Attualmente Lona vede nel *transadriaticus* una razza dello *spalatrensis* Boh. [*Gridelli*].

Otiorrhynchus crinipes Miller (C. Lona determ.). – Umbra (Pomini). Holdhaus 1911: S. Angelo, Lago S. Giovanni, Lo Sfrizzo, Costa di Manfredonia.

La forma tipica della specie, *crinipes crinipes* Miller, è diffusa nella Dalmazia meridionale, nell'Erzegovina, nel Montenegro, nell'Albania, ed in alcune isole dalmate: Lesina, Curzola, Lagosta, Meleda; venne indicata erroneamente come presente a Zara e sul Monte Maggiore d'Istria (Luigioni).

Nell'Italia media meridionale (Gargano, Campobasso, S. Biase di Vallo Lucano) è diffusa la razza *crinipes pilipes* Leoni. Ed infine nei dintorni di Bologna (Monte Paderno) esistono popolazioni del *crinipes Falzonii* Solari (a proposito delle razze italiane vedi Solari, « Boll. Soc. Ent. Ital. », 1947, p. 2). [*Gridelli*].

Otiorrhynchus perdix Ol. – Umbra, Ginestra (Pomini).

Argoptochus Schwarzi Reitt. – Ginestra (Pomini).

Descritto per la prima volta da Reitter (1888) con il nome di *Foucartia Schwarzi*, secondo esemplari di Corfù. Ridescritto da Apfelbeck nel 1901 (*Ptochus albanicus*: Albania) e da K. Daniel nel 1904: *Ptochus (Argoptochus) ophthalmicus*, secondo esemplari di « Varano in Apulien » e del Monte Conero.

Holdhaus (1911) nota di averlo raccolto in quantità sul Gargano, presso al Lago S. Giovanni, falciando pendii erbosi, ed in singoli individui a Lo Sfrizzo e sulla Costa di Manfredonia, e ne indica correttamente la diffusione: Albania, Corfù, Italia media e meridionale [*Gridelli*].

* *Phyllobius parvulus* Oliv. - Ginestra (Pomini).

Phyllobius romanus Faust. - Umbra, Ginestra (Pomini).

* *Phyllobius etruscus* (Desbr.) Solari. - Umbra, Ginestra (Pomini).

Phyllobius longipilis Boh. - Umbra, Ginestra (Pomini).

Phyllobius sinuatus Fab. - Umbra (Ghigi).

Polydrosus frater Rottnb. (*Emeryi* Desbr.). - Umbra (Pomini).

* *Polydrosus cervinus* L. - Umbra, Ginestra (Pomini), esemplari di passaggio alla var. *melanotus* Steph.

Polydrosus brevicollis Desbr. - Umbra (Pomini).

P. brevis Schilsky (= *curtulus* Schilsky emend.), è sinonimo di *brevicollis* Desbr. I caratteri dati da Schilsky per separare il *brevis* dal *brevicollis* non reggono. Ho fatto controllare la cosa anche da Binaghi, su di un esemplare di *brevicollis* di Gubbio, avente squamule integre, colorito verde pallido e scudetto squamoso, che, messo nell'acqua e lavato, diventò un *curtulus* con squamule aventi un punto nel centro e di un colorito verde metallico molto splendente, esattamente come nel *brevis* del Gargano. La nudità più o meno estesa dello scudetto è carattere variabile e più che altro effetto di ottica, in molti casi [*Solari*].

* *Sciaphobus psittacinus* Dan. - Umbra (Pomini).

Sitona lineatus L. - Umbra (Pomini).

Sitona limosus Rossi. - Cagnano, Varano (Pomini).

Sitona sulcifrons Thunb. - Umbra (Pomini).

* *Chromoderus fasciatus* Müll. - Umbra (Pomini).

Cleonus piger Scop. - Alveo S. Egidio (Pomini).

Lixomorphus ocularis Ol. - Alveo S. Egidio (Pomini). Indicato da Holdhaus (1911) del Lago S. Giovanni (*barbarus* Ol.).

Lixus iridis Oliv. - Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Lixus junci* Boh. - Mattinata (Pomini).

Lixus ascanii L. - Alveo S. Egidio, Umbra (Pomini): var. *albomarginatus* Boh.

Lixus algirus L. - Varano, Cagnano (Ghigi, Pomini).

* *Lixus punctiventris* Boh. - Ginestra, Pomini (Gridelli determ.).

Lixus cardui Ol. - Ginestra, Mandrione, Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Larinus flavescens* Germ. - S. Nicandro (Pomini).

Larinus scolymi Ol. - Alveo S. Egidio (Pomini).

* *Larinus sturnus* Schall. - Ginestra (Pomini).

Larinus carinirostris Gyllh. - Valle d'Umbra (Pomini).

Bangasternus provincialis Fairm. - Ginestra (Pomini): specie della quale conosco esemplari di Alassio, Albissola, Genova, S. Leo in provincia di Urbino, Francia meridionale (Mt. de Marsan); Cortona e S. Biase di Ceraso (Vallo Lucano), due esemplari leggermente diversi. (Solari in litt.).

Credo per lo meno molto probabile che il *Bangasternus orientalis* Cap., del Lago S. Giovanni (Gargano; Holdhaus 1911) sia in realtà il *provincialis*. Il dott. F. Solari non vide mai esemplari italiani dell'*orientalis* Cap., del quale possiede esemplari della Macedonia (Keretschkoi, Schatzmayr leg.), del Lenkoran, del Tauro (Aintab) e della Siria.

Phytonomus meles F. - Umbra, Ginestra (Ghigi, Pomini).

* *Phytonomus viciae* Gyllh. - Umbra (Pomini).

* *Rhinonchus pericarpius* L. - Umbra (Pomini).

Cidnorrhynus quadrimaculatus L. - Valle d'Umbra (Pomini).

* *Ceuthorrhynchus Aubei* Boh. - Mandrione (Pomini).

* *Ceuthorrhynchus griseus* Bris. - Umbra (Pomini).

Ceuthorrhynchus Duvali Bris. - Umbra (Pomini).

Ceuthorrhynchus erysimi F. - Umbra, Pomini leg.: var. *cyaneus* Weise.

Ceuthorrhynchus Ragusae Bris. – Ginestra (Pomini). Lago S. Giovanni, Bosco Spigno, Costa di Manfredonia (Holdhaus 1911).

Si tratta, almeno con grande probabilità, di una specie trans-adriatica, essendo essa presente nell'Italia media meridionale, Elba, Sicilia, nella Venezia Giulia, nella Dalmazia e nella Bosnia.

Però l'area di diffusione non mi è nota con sufficiente esattezza [*Gridelli*].

Curculio glandium Marsh. – Umbra, Ginestra (Pomini).

* *Curculio propinquus* Desbr. – Ginestra, una femmina (Pomini).

Anthonomus rubi Herbst. – Umbra (Pomini): var. *inornatus* Daniel.

Anthonomus pedicularius L. – Umbra (Pomini).

Tychius quinquepunctatus L. – Umbra (Pomini).

* *Tychius Schneideri* Herbst. – Ginestra (Pomini).

Sibinia attalica Gyllh. – Ginestra (Pomini).

Rhynchaeus fagi L. – Ginestra (Pomini).

ISOLE TREMITI

Per molte ragioni la fauna di dette isole merita un trattamento a parte (vedi Gridelli, l. c. 1949). Il nucleo fondamentale di quanto noi oggi ne conosciamo è dovuta all'opera intelligente ed esatta di Giacomo Cecconi: *Contributo alla fauna delle Isole Tremiti*, « Boll. Mus. Zool. Anat. Compar. Mus. Torino », vol. XXIII, N. 583, 1908.

In detto lavoro il Cecconi elenca 155 specie di coleotteri, determinate in parte personalmente ed in parte dai più noti specialisti dell'epoca; una parte della memoria, quella riguardante i coleotteri, venne ripubblicata nella « Rivista Coleotterologica Italiana », VII, 1909, pp. 36-52 e pp. 71-80.

F. P. Pomini visitò le Tremiti nell'aprile 1940, raccogliendovi le 28 specie elencate più oltre, delle quali 5, segnate con un asterisco, non figurano nel lavoro di Cecconi.

Le Tremiti vennero inoltre visitate dal sottoscritto (alcuni giorni, alla fine del marzo 1948) e da Sandro Ruffo (due settimane, nel maggio 1948); lo studio del materiale raccolto è in corso.

La piccola isola di Pianosa può dirsi quasi sconosciuta. Di essa mi sono note soltanto le 17 specie di coleotteri citate dal Cecconi, nella memoria suddetta. Tanto io quanto Ruffo abbiamo invano tentato di farci trasportare su quel lembo di terra, relativamente vicino alle Tremiti.

* *Ditomus calydonius* Rossi. - San Domino, un maschio.

* *Acinopus picipes* Ol. - San Domino, un individuo.

Harpalus sulphuripes Dej. - San Domino, San Nicola, Caprara; frequente.

Cymindis axillaris L. - San Domino, alcuni esemplari. Riferirò su essi in altro lavoro.

* *Oxytelus inustus* Gravh. - San Domino, una femmina.

Scarabeus affinis (Brullé) Müll. - San Domino, un esemplare.

* *Copris hispanus* L. - San Nicola, 3 esemplari.

Pentodon punctatus Villers. - San Domino, un esemplare.

Tropinota squalida Scop. - San Domino, San Nicola, Caprara; frequente.

Oxythyrea funesta Poda. - San Domino, Caprara; frequente.

Cetonia aurata L. - San Domino e Caprara, dodici esemplari i quali differiscono alquanto da quelli della costa garganica e pugliese mentre ricordano molto gli esemplari balcanici della subsp. *aurata aurata* L.

Malachius brevispina Kiesw. - San Domino, una femmina; Caprara, un maschio e 5 femmine.

Psilothryx cyaneus Ol. - San Domino, 4 esemplari; Caprara, 5 esemplari.

* *Meligethes aeneus* F. - San Domino, 2 esemplari.

Olibrus affinis Strm. - Caprara, un esemplare.

Tentyria italica Sol. - San Domino, frequente.

Blaps gibba Cast. - San Domino, 4 esemplari.

Pedinus meridianus Muls. - San Domino, San Nicola, Caprara; frequente.

Dendarus dalmatinus Germ. - San Nicola, singoli esemplari.

Raiboscelis azureus Brullé. - San Nicola, Caprara; frequente. Le Tremiti rappresentano la sola stazione italiana nota di questa specie (segnalata per errore come presente a Bolzano) la quale manca pure nell'Istria e nella Dalmazia. Compare soltanto a Corfù e nell'estremo sud dell'Albania (Mursi!, Konispol!), a Zante, nonchè in varie stazioni della Grecia ed anche, probabilmente, nell'Asia Minore.

Parmena pubescens Dalm. - San Nicola, un esemplare (det. G. Müller).

Chrysomela americana L. - San Nicola, San Domino; frequente.

Chrysomela Banksi F. - San Nicola, San Domino; singoli esemplari.

Cryptocephalus macellus Suffr. - Capperaia, 3 esemplari (det. Burlini).

Bruchidius bimaculatus Ol. - San Domino, 8 esemplari (det. Müller).

Bruchidius pusillus var. *picipes* Germ. - San Domino, 2 esemplari (det. Müller).

Otiorrhynchus villosus Stierl. - Caprara, un esemplare (det. Lona).



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 14
pag. 197-200

MORIO ECHINOPHORA MONSTR. RUGGERI

DI UN INDIVIDUO MOSTRUOSO DELLA *MORIO* (CASSIDARIA) *ECHINOPHORA L.* (*)

(Con una tavola)

G. S. COEN

SVMMARIVM. — Describit Auctor exemplar anomalum speciei *Morio echinophora L.* quod ipse unicum putat.

È stata mia sorte, negli anni ormai numerosi che ho consacrato allo studio della malacologia, di trovare e descrivere molte e nuove forme di *Morio echinophora L.*, fra cui talune specie e parecchie varietà, inoltre alcune anomalie ed anche varie mostruosità, cui la specie va soggetta in modo particolare. E di tali mostruosità altre non sospettavo esistere, se non che, proprio in questi giorni, il chiaro mio amico, Dott. GIULIANO RUGGERI, procuratosi un esemplare straordinario, volle farmene dono; si tratta di un individuo mostruoso, stranissimo; e passo a descriverlo, a lui dedicandolo.

L'aspetto della conchiglia è tale che, ove mancasse l'ultimo giro, o si potesse prescinderne, sarebbe addirittura impossibile assegnarla al genere; quì contro ne dò la riproduzione, esattamente in grandezza naturale.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 18 gennaio 1950.

L'ultimo anfratto è, di forma e dimensioni, perfettamente normale; il canale, retto e più allungato del solito, è sottile e deviato a sinistra sì da apparire orizzontale; l'apertura, e la columella con la sua callosità, sono assolutamente normali; il labbro è svasato, internamente liscio, senza traccia alcuna dei denti, che porta tanto spesso, nè di varici esterne.

Appena, risalendo la spira, si raggiunge la sutura, questa si rivela regolare; ma con essa, e col secondo anfratto, ha inizio la parte straordinaria: la spira, che in tutte le varietà, forme ed anomalie finora descritte nella specie, non oltrepassa in altezza la metà o, al massimo, e raramente i due terzi dell'altezza dell'ultimo giro, nel nostro esemplare ne raggiunge addirittura il doppio; essa è regolarmente turriculata e consta di 7 giri perfettamente regolari, cilindrici, rigonfi e leggermente inclinati, riuscendo così le suture oblique e profonde; il profilo laterale è allungato e convesso: l'apice regolarissimo, arrotondato.

La scultura esterna, dopo i primi 2-3 giri embrionali quasi lisci, consiste in numerosi sottilissimi cingoli spirali, solo talvolta appaiati, e solo verso le suture, ondulati e rugosi.

Notevole è l'assoluta assenza dei cingoli spirali tuberculiferi e delle varici longitudinali, caratteristici della conchiglia normale e di quasi tutte le sue varietà.

La colorazione è la normale, cioè uniformemente giallo-bruna, con l'interno della bocca e il peristoma di assoluto candore.

Dimensioni: L = mm. 104, l. = mm. 44.

Hab. ??



Collezione Coen, N. 11419.


PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 15
pag. 201-212

IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE E LE LEGGI DELL'ELETTRODINAMICA (*)

(Con due figure)

MARIO GALLI

SVMMARIVM. — Auctor ostendere vult nonnullos physicos nuper conatos esse defendere, sine validis rationibus, primariam legem circuituum electricorum ab Ampère statutam. Speciatim autem disputat an validum sit in electrodynamica principium, quo actio et reactio inter se aequales dicuntur.

Da alcune discussioni recentemente avvenute è emersa di nuovo la preoccupazione di volere conciliare il principio di azione e reazione della meccanica con le leggi elementari dei circuiti elettrici. Ed è curioso che questa stessa preoccupazione induca a conclusioni opposte.

Così L. MATHUR dichiara: « Non sempre ci si rende conto che la legge di Newton dell'azione e reazione non è generalmente valida per le forze mutue fra elementi di corrente. L'inapplicabilità delle leggi di Newton non è comunemente sottolineata nei testi di elettrodinamica. ed il non riconoscere questo fatto è spesso causa di confusione nei calcoli elettrici ». (1)

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 23 gennaio 1950.

(1) S.B. L. MATHUR, *Biot-Savart Law and Newton Third Law of Motion.* « Phil. Mag. », XXXII, pag. 171 (1941).

A. Robertson invece conclude la sua apologia della legge elementare di Ampère con le parole: « Quantunque la formola di Ampère non sia perfetta essa è certo superiore a quella di Biot e Savart. la sola presentemente in uso » (1). La ragione della superiorità consisterebbe nel fatto che essa rispetta il principio di azione e reazione.

Ma questa preoccupazione di conciliare il terzo principio della dinamica di Newton con le leggi fondamentali dei circuiti elettrici è poi veramente fondata?

Per rispondere adeguatamente alla domanda premettiamo alcune considerazioni.

1. In ogni legge naturale bisogna distinguere il contenuto empirico e la forma. Il contenuto empirico è il dominio sperimentale che essa pretende di regolare e la totalità delle previsioni che consente di fare. Il suo aspetto formale concerne le operazioni che dobbiamo fare per coordinare ed anticipare i risultati dell'esperienza.

Nel caso presente il contenuto empirico è l'interazione tra circuiti completi percorsi da correnti stazionarie.

Ora tanto la legge di Biot e Savart quanto quella di Ampère fanno dipendere la forza ponderomotrice che un circuito A esplica su un circuito A′ da un integrale doppio di linea:

$$\underset{\rightarrow}{F} = \int\int \underset{\rightarrow}{Q}\, ds\, ds'$$

dove però Q è una funzione vettoriale diversa nei due casi.

Nella formola di Biot e Savart:

$$\underset{\rightarrow}{Q} = C \frac{i\,i'}{r^3} \left[\underset{\rightarrow}{a'}\, \underset{\rightarrow}{b}\right]_v$$

essendo $\underset{\rightarrow}{b} = \left[\underset{\rightarrow}{a}\, \underset{\rightarrow}{r}\right]_v$ ed indicando a ed a' rispettivamente i vettori unitari tangenti rispettivamente a ds e ds'. Nella formola di Ampère invece

$$\underset{\rightarrow}{Q} = -C \frac{i\,i'}{r^3} \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2} \cos\theta \cos\theta'\right) \underset{\rightarrow}{r}$$

(1) A. Robertson, *An historical Note on a Paradox in Electrodynamik.* « Phil. Mag. », XXXVI, pag. 32, (1945).

essendo ε, θ, θ' rispettivamente gli angoli che i vettori paralleli a ds e ds' formano tra se stessi e con la retta congiungente gli elementi considerati. C è in ambedue i casi una costante dipendente dalle unità prescelte.

Quando poniamo la questione se queste leggi sono vere o false possiamo rispondere adeguatamente solo esplorandone il contenuto empirico e facendo delle verifiche sperimentali. Bisognerà per conseguenza confrontare l'interazione prevista ed osservata tra circuiti completi. Impostando così la questione, si dimostra razionalmente che le due leggi sono necessariamente coincidenti. O sono ambedue vere o ambedue false. Anzi si può dimostrare che esistono infinite leggi circuitali ad esse equivalenti. Alcune di queste sono state effettivamente proposte da vari fisici (1).

Per conseguenza, finchè non amplifichiamo il contenuto empirico delle due leggi, la questione della preferenza all'una piuttosto che all'altra è circoscritta al loro aspetto formale. Converrà scegliere quella di uso più facile. Ora la legge di Biot e Savart è indubbiamente più semplice e più comoda.

2. Quando però si fissa l'attenzione sui differenziali, cioè sull'espressione isolata $Q\, ds\, ds'$, i punti di vista sono due.

Alcuni li riguardano come esprimenti un senso fisico diretto anche isolatamente considerati. Secondo costoro un elemento infinitesimo di circuito esplica su un altro elemento infinitesimo un'azione elementare per la quale deve essere possibile, almeno concettualmente, dare una formulazione differenziale precisa. Sommando poi questi contributi infinitesimi si dovrebbe ottenere l'interazione macroscopica tra circuiti completi.

Invece, secondo l'altro punto di vista oggi più comune, i differenziali in questione non esprimono alcun fatto fisico. Sono semplicemente elementi di una integrazione. Solo la quantità ottenuta con l'integrazione è empiricamente significativa.

Che cosa dobbiamo pensare di questi due punti di vista? Intanto premettiamo che, per quanto riguarda il primo, indebitamente si estende il contenuto empirico delle leggi che stiamo esaminando. Noi ci siamo

(1) O. D. Chwolson, *Traité de Phisique.* IV, 2, pag. 599. Paris (1913).

proposti di esprimere adeguatamente l'interazione tra circuiti completi. L'interazione elementare è fuori causa. Anche se essa avesse un significato fisico, non saremmo rigorosamente obbligati a prenderla in considerazione. Questo almeno finchè ci proponiamo di coordinare razionalmente la fenomenologia macroscopica.

Ma supponiamo di volere andare oltre. Si può attribuire un significato fisico diretto all'interazione elementare tra elementi infinitesimi di circuito?

Stando all'orientamento eminentemente positivo della scienza moderna, la risposta è indubbiamente negativa. L'interazione tra due elementi di circuito è praticamente e concettualmente inverificabile. Non esiste nessuna esperienza, neppure ideale, il cui risultato si possa definire come tale presunta interazione elementare. Anche la conformità di tale legge differenziale a certi supremi principî, quali il principio di azione e reazione, non costituirebbe un criterio sufficiente per individuarla fra le altre possibili. La questione così impostata diventa oggettivamente insolubile, poichè non si potrà mai risolvere nè con l'esperienza nè col raziocinio.

3. Tuttavia il fatto che anche oggi alcuni fisici si ostinino ad attribuire un senso indipendente alla formulazione differenziale delle leggi circuitali deve avere una spiegazione se non una giustificazione.

Molto probabilmente la causa di tale errata posizione della questione consiste nell'ignorare la distinzione tra le leggi elementari ora esaminate e la legge d'interazione tra corpuscoli elettrici (1). Questa interazione ha indubbiamente un senso, ma per riuscire ad esprimerla adeguatamente bisogna abbandonare il concetto delle azioni a distanza, il che esclude la possibilità di soddisfare al principio di azione e reazione, almeno nella sua forma primitiva.

Schwarzschild (2) fondandosi sulla teoria di Maxwell-Lorentz, riuscì a determinare la forza con la quale un elettrone e' mobile con

(1) Da alcune espressioni contenute negli articoli citati si rileva che tale confusione non è stata evitata.

(2) K. Schwarzchild, *Göttinger Nachrichten*. (1903) pag. 132. Cf. anche V. Ritz, *Recherches sur l'électrodynamique générale*. « Ann. de Physique », XIII, pag. 217 (1908) « Frenkel. Lehrbuch der Elektrodynamik », I, pag. 170, Leipzig 1926.

velocità v' e con l'accelerazione w' agisce su un elettrone e mobile con velocità v.

$$F_x = \frac{ee'}{R^2}\gamma\left[A\cos(R, x) + B\frac{v'_x}{c} + C\frac{Rw'_z}{c^2}\right]$$

con espressioni analoghe per F_y ed F_z.

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v'_R}{c}}$$

$$A = \gamma^2\left[1 - \frac{v_x v'_x + v_y v_y' + v_z v'_z}{c^2}\right]\left[1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{Rw'_R}{c^2}\right] - \frac{R\gamma}{c^3}\left[v_x w'_x + v_y w'_y + v_z w'_z\right].$$

$$B = \gamma^2\left[1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{Rw'_R}{c^2}\right]\left[\frac{v_R}{c} - 1\right]$$

$$C = -\gamma\left[1 - \frac{v_R}{c}\right].$$

L'espressione è molto complicata, specialmente se si tiene conto che le grandezze relative alla carica e' devono essere riferite al tempo effettivo t' legato al tempo t della relazione: $t' = t - \frac{R}{c}$.

È manifesto che formole come questa non possono essere assunte come punto di partenza per determinare l'interazione tra circuiti elettrici. Ma a noi importa soprattutto rilevare che il principio newtoniano dell'azione e reazione non è minimamente soddisfatto.

Peraltro Lorentz (1) e Poincaré (2) hanno dimostrato che esso può essere riabilitato per un sistema di corpuscoli elettrici a patto di considerare come elemento del sistema anche il campo elettromagnetico ed attribuendo ad esso una quantità di moto secondo la legge:

$$d\vec{Q} = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]_v dV.$$

È facile rendersi conto che per certi sistemi macroscopici il principio di azione e reazione non è verificato a meno che in realtà non

(1) H. A. Lorentz, *The theory of electrons*. Pag. 32, Leipzig, 1909.

(2) H. Poincaré. « Arch. Néerland. », (2) 5 pag. 252 (1900) Cf. anche Zerner « Handbuch der Physik. », XII, pag. 175, Berlin 1927.

si adotti la convenzione ora riferita. Un chiaro esempio è costituito da un proiettore parabolico isolato e libero di muoversi. Quando esso emette luce, lo specchio parabolico, a causa della pressione di radiazione, si muove in direzione opposta a quella di propagazione del fascio luminoso, senza essere sollecitato da forze esterne. Accettando però la concezione predetta si dimostra che il teorema della conservazione della quantità di moto vale per il sistema proiettore-radiazione.

La necessità di conglobare corpuscoli elettrici e campo, se si vuole salvare, almeno formalmente, il principio di azione e reazione, non è stata adeguatamente riconosciuta nelle polemiche recenti alle quali abbiamo accennato. Scrive ad esempio ROBERTSON: « Poynting credeva all'esistenza dell'etere e derivò una espressione per calcolare il suo momento ... però un gran numero di esperimenti eseguiti negli ultimi cinquant'anni per scoprire un tale etere non lasciano alcun dubbio che il metodo di Poynting è destituito di ogni realtà fisica » (1).

Rispondiamo: È verissimo che le teorie meccaniche dell'elettricità sono tramontate, ma questo non favorisce nel caso presente la tesi che si vorrebbe patrocinare ma piuttosto milita contro di essa. Se infatti la concezione di Poynting fosse ammissibile, il principio di azione e reazione sarebbe salvo nel senso letterale della parola. Infatti qui entrerebbe nei fenomeni un etere dotato di proprietà meccaniche, capace di assorbire o cedere quantità di moto in senso proprio. Quando questo si esclude, il principio in questione si salva, ma solo formalmente. Volendolo salvare ad ogni costo sarebbe più conveniente attenersi alle vedute meccanicistiche di alcuni illustri elettricisti del secolo scorso. Tale posizione sarebbe però oggi insostenibile.

Comunque risulta chiaro che è del tutto infondata la pretesa di subordinare le leggi elementari dei circuiti al principio di azione e reazione, anche se si volesse dare un significato fisico (ciò che peraltro non concediamo) all'analisi del circuito in tratti elementari.

4. C'è tuttavia una obbiezione di Cleveland (2) dalla quale risulterebbe che il principio di azione e reazione è violato anche con riferimento a sistemi macroscopici, qualora si voglia adoperare la for-

(1) Memoria citata, pag. 47.

(2) F. F. CLEVELAND. « Phil. Mag. », XXI, pag. 415 (1936).

mola di Biot e Savart, senza che sia possibile salvarlo con l'attribuire al campo elettromagnetico una quantità di moto. L'obbiezione si può così riassumere:

Si consideri il circuito rettangolare (figura 1) e si ammetta che i lati α e γ siano notevolmente più piccoli dei lati β e δ. I lati α e γ sono sollecitati da due forze uguali e contrarie dirette verso l'esterno. Lo stesso vale per i due lati β e γ. Ora supponiamoche i lati β, γ, δ siano rigidamente collegati, ed α invece sia da essi separabile. Affinchè si salvi il principio di azione e reazione bisogna ammettere che le forze operanti su α e sul sistema $\beta\gamma\delta$ siano uguali e contrarie. Tale è effettivamente il caso poichè le due forze F_1 ed F_2 si elidono. L'esperienza diretta effettuata da Cleveland conferma questa previsione. Tuttavia questo fisico ritiene che l'appli cazione della formola di Biot e Savart conduca ad un errore in quanto essa fa prevedere il giusto valore della forza operante sul sistema $\beta\gamma\delta$, ma induce ad attribuirla ai tratti di conduttore β e δ, e non già al tratto α, come dovrebbe essere. Si avrebbe quindi il risultato paradossale che il sistema $\beta\gamma\delta$ solleva se stesso, in virtù di forze dovute alle sue varie parti, ciò che si ritiene comunemente impossibile. Questo inconveniente invece non si avrebbe applicando la legge di Ampère.

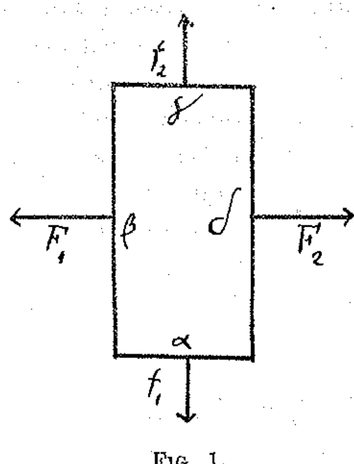


FIG. 1.

Cleveland aggiunge pure l'importante considerazione che il principio di azione e reazione è osservato senza eccezione anche nei fenomeni atomici, cioè proprio là dove tutte le leggi ritenute una volta sicurissime sembra vengano meno. È quindi per lo meno temerario metterlo in dubbio nei fenomeni macroscopici.

Questa riflessione ha certo molta importanza, ma bisogna completarla. Se infatti consideriamo tra i fenomeni atomici quelli nei quali interviene il fotone, constatiamo che il principio di azione e reazione è osservato, ma a condizione di includere nel sistema anche il fotone e di attribuire ad esso la quantità di moto $\frac{h\nu}{c}$. In termini classici

ciò equivale ad attribuire al campo elettromagnetico una quantità di moto conformemente alla legge sopra riferita.

Ma tornando all'obbiezione fondata sulla considerazione di tratti finiti di circuito si deve dire che la forza operante nel tratto di conduttore γ non è attribuibile in senso proprio all'una piuttosto che all'altra parte del circuito, nè la legge di Biot e Savart rettamente intesa ci autorizza a fare questa indebita attribuzione. Questa legge è stata istituita per il calcolo giusto delle forze che operano su conduttori finiti e su tratti infinitesimi di conduttore non già per stabilire a quali tratti di conduttore si debbano attribuire. La cosa diventa più chiara quando accettiamo la teoria delle azioni di contatto. La forza operante su γ è dovuta ad un certo stato dell'etere ambiente, stato che si è costituito precedentemente ed alla cui realizzazione ha cooperato tutto il circuito. I tratti β e δ non potrebbero operare se non fossero congiunti con α. Ed allora non si può concludere che il sistema $\beta\gamma\delta$ sollevi se stesso, come se α non esistesse.

5. Ma c'è ancora un'altra ragione che giustificherebbe secondo Robertson il ripristino della legge di Q Ampère, ed è fondata su una famosa esperienza di Hering che in breve si può così riferire:

Sia dato un circuito del tipo rappresentato in figura 2. HB è una scalanatura a forma di arco circolare riempito di mercurio, sul quale è appoggiato il tratto metallico OP libero di rotare intorno a O. MN sia abbastanza lontano da OB così che l'azione su di esso sia trascurabile. La corrente circoli nel verso indicato dalla freccia. Vogliamo citare le parole precise di Robertson: « Quando Hering richiese a numerosi fisici quale avrebbe dovuto essere la direzione del moto del tratto di conduttore OP, tutti dichiararono senza eccezione che essa doveva muoversi verso l'esterno. Ed infatti questo risultato sperimentale è così opposto ai giudizi preconcetti che uno quasi sempre sospetta un trucco, e subito Hering ebbe contrari molti critici, ma non vi fu alcuno che ripetè gli esperimenfi di Hering e non trovò che il filo OP si muove verso l'interno a condizione che i lati QM e RS non siano piccoli in confronto di MN ».

E subito dopo aggiunge a giustificazione della legge di Ampère: « Secondo questa formola vi è una repulsione longitudinale fra gli elementi di corrente (ovvero gli elettroni) in un filo metallico. Queste

forze in pratica si elidono reciprocamente, ma in un liquido come il mercurio queste forze longitudinali sono capaci di spingere l'estremo P del conduttore mobile verso l'interno ».

Ma qui occorre una precisazione sperimentale. Occorre cioè precisare se l'estremo del conduttore OP scorre sul mercurio ovvero è trascinato da esso nell'atto in cui esso si espande longitudinalmente. Nel primo caso non si vede proprio a che cosa possano servire le

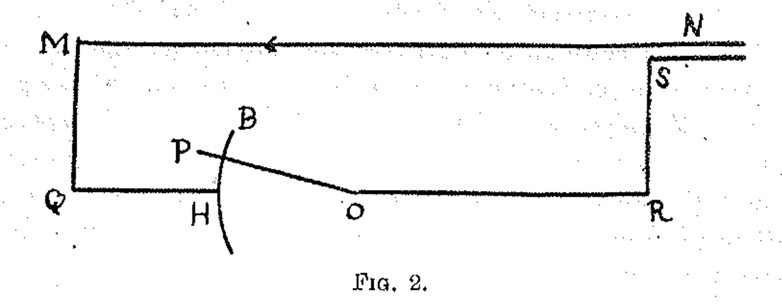


Fig. 2.

repulsioni longitudinali di Ampère. Nel secondo caso non vi sarebbe niente di scandaloso per chi si attiene ai comuni principî di elettrodinamica. Che un conduttore liquido mostri una tendenza ad allungarsi è sperimentalmente provato, ma il fatto rientra nelle formole comunemente accettate. Lo ha dimostrato egregiamente il Professore G. Giorgi nel 1925 a proposito di varie esperienze di Hering [1].

Ma consideriamo pure giusta la prima alternativa. Procuriamo di precisare il vero significato del teorema che si vorrebbe contestare. Questo dice che qualora un circuito possa variare la sua configurazione, come nel caso riferito, esso si modifica in modo da conseguirne un incremento della sua induttanza. Il teorema è solidissimo perchè fondato sul concetto di energia [2]. Ora comunemente in casi simili il tratto di conduttore mobile su contatti striscianti deve spostarsi verso l'esterno perchè si abbia un incremento di induttanza. Ciò avviene sempre se il circuito è ovunque convesso [3]. Ma in casi speciali può aversi un incremento di induttanza anche con una contrazione della superficie interna abbracciata dal circuito in quanto tale con-

(1) G. Giorgi, *L'elettrotecnica*, XII, pag. 435 (1925).
(2) J. Jeans, *Electricity and Magnetism*, pag. 505. Cambridge, 1946.
(3) G. Giorgi, *L'elettrotecnica*, pag. 436, n. 6 (1925).

trazione è compensata da un incremento del campo magnetico. Purtroppo il calcolo teorico dell'induttanza è estremamente difficile, poichè, in ordine a questo scopo, il circuito non si può schematizzare con una linea, neppure approssimativamente, come invece si può fare per l'induttanza mutua di due circuiti.

Ma si può vedere con considerazioni non troppo affrettate che non sempre un incremento di induttanza richiede una espansione del circuito. Per conseguenza non è affatto vero che ogni fisico (ma quali fisici sono stati consultati?) basandosi sul teorema del massimo flusso debba prevedere un contrasto tra teoria ed esperienza di Hering. Del resto J. H. Morecroft citato da Robertson, ha determinato sperimentalmente l'induttanza per il circuito in questione ed ha trovato che essa aumenta anche quando il tratto OP si sposta verso l'interno. Ed allora di fronte al responso irrefragabile dell'esperienza è inutile insistere nell'obbiezione.

Si può quindi concludere che anche questo argomento non giustifica una riabilitazione della formola elementare di Ampère.


PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII - N. 16
pag. 213-216

SU UN NUOVO GORDIO DELLA CIRENAICA E SULLA DISTRIBUZIONE DEL GENERE *GORDIUS* IN AFRICA (*)

(Con una tavola)

IGINIO SCIACCHITANO

SVMMARIVM. — Describit Auctor novam Gordii speciem Cirenaicae regionis et recenset species huius generis quae usque adhuc in Africa collectae sunt.

I.

Questa nota doveva uscire nel 1940, ed io l'avevo preannunziata in altro lavoro da me pubblicato nello stesso anno [6]. Per un cumulo di circostanze non fu mai pubblicata, si smarrì il manoscritto e disegni relativi e per un momento anche l'esemplare in questione. Per quanto in ritardo credo utile, ora che ho potuto rintracciare il materiale, pubblicare finalmente la sfortunata nota.

Si tratta di un esemplare di gordio raccolto dal Prof. A. TOSCHI a Cirene (Derna) il 15 gennaio 1939. È un reperto veramente interessante perchè si tratta di una specie nuova. Sinora poco si sa della distribuzione geografica del genere Gordius in Africa perchè poco si è trovato e cercato.

Darò una breve descrizione della nuova specie ed elencherò poi tutte le specie di questo genere che si sono trovate in Africa.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 10 febbraio 1950.

II.

Gordius Toschii n. sp.

Dedico questa specie al raccoglitore Prof. A. Toschi.

Un maschio lungo mm. 181, diametro massimo di circa 1 mm.

Capo arrotondato, distinto dal resto del corpo da una leggera strozzatura, vi è un collare nero. Colore bruno scuro. Esternamente il corpo di questo gordio presenta numerose pieghe trasversali, visibili ad occhio nudo, tanto da sembrare un animale metamerico. La sezione dello strato cuticolare si presenta con numerose e ravvicinate pieghe trasversali ondulate, comprese fra coppie di piehe più spesse, quelle visibili anche ad occhio nudo. Figura 1.

Lobi posteriori abbastanza lunghi, circa mm. 0,75, non simmetrici, perchè uno è un po' più lungo e più largo dell'altro.

Questi lobi sono fatti come a cucchiaio, con i bordi irregolari e piegati verso la parte ventrale, con differenza di forma fra ogni lobo. Figura 2.

Tutta la zona fra i due lobi ed il bordo superiore dei due, chiamiamoli così, cucchiai, è pigmentata in scuro per la presenza di numerosi tubercoli e setole.

La lamina postcloacale semilunare si estende poco sui due lobi, è della forma comune ad altre specie di gordi.

III.

Nel 1910. Camerano [1] segnalò il primo Gordio, *Gordius meruanus* Cam., per l'Africa, nella regione elevata del monte Mérù dell'ex Africa orientale tedesca.

Nel 1932 io [2] e [3] segnalai una specie di questo genere per la Cirenaica ed una per la Somalia. Successivamente [4] e [5] segnalai tre specie di questo genere nel Congo belga.

Credo utile ora fare l'elenco di quanto si conosce sinora di questo genere per il continente africano nelle diverse regioni.

CIRENAICA

1. *Gordius gialensis.* Sciacc. [2] Gialo. aprile 1932. Parassita di un Erinaceus aethiopicus Ehren.

2. *Gordius toschii.* n. sp. Cirene (Derna) 15 gennaio 1939.

La prima di queste specie è interessante per l'ospite che la conteneva. Ancora non si era segnalato un gordio parassita di un Insettivoro.

SOMALIA.

3. *Gordius zammaranoi.* Sciacc. [3]. Zona del basso Ubei.

EX AFRICA ORIENTALE TEDESCA.

4. *Gordius meruanus.* Cam. [1] sopra citato.

CONGO BELGA.

5. *Gordius crispatus.* Sciacc. [4]. Elisabethville. Agosto 1931.
6. *Gordius rhomboidalis.* Sciacc. [4]. Kisantu, 9 dicembre 1920.
7. *Gordius bouvieri.* Siacc. [5]. Lomami: Lufuta. Aprile 1934.

Trattandosi delle prime specie del genere *Gordius* segnalate in Africa si capisce come siano tutte nuove.

Le specie 3 e 7 sono state segnalate solamente con esemplari femminili, ma dato che la struttura della loro cuticola non permetteva di assegnare questi esemplari alle specie già conosciute, necessariamente dovevano descriversi gli esemplari come specie nuove.

BIBLIOGRAFIA

[1] 1910. CAMERANO L., «Wiss Ergeb. d. Schwed. Zool. Exp. dem. Kilimandjaro ecc.» 22 Vermes, 141. Gordidae. Stockholm.

[2] 1932. SCIACCHITANO I., *Spedizione scientifica all'Oasi di Cufra (marzo-luglio 1931).* «Gordii Annali Museo Civico di Storia Naturale di Genova». Vol. IV, Genova.

[3] 1932 — *Su alcuni Gordii del Museo civico di Milano.* «Atti Soc. It. Scienz. e Nat.», Vol. LXXI. Milano.

[4] 1933 — *Su alcuni Gordii del Congo Belga* «Rev. Zool. Bot. Afr.», XXIV. 1, Bruxelles.

[5] 1937 — *Nuovi Gordii del Congo Belga.* «Ibidem.», XXX, 1.

[6] 1940 — *Le attuali conoscenze sui Gordii dell'Africa Italiana.* «Rivista di Biologia Coloniale», Vol. III, Fasc. VI. Roma.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Strato cuticolare del *Gordius toschii* n. sp.

Fig. 2. — Estremità posteriore del *Gordius toschii* n. sp.

Le figure sono state disegnate a mano libera guardando i preparati con l'oculare 5·6 Koritscha e l'obbiettivo 42 x (Officina Galileo, Firenze).

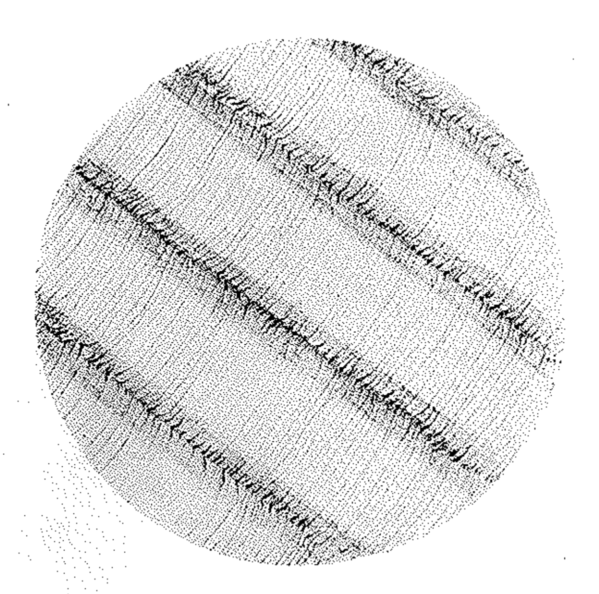


Fig. 1.

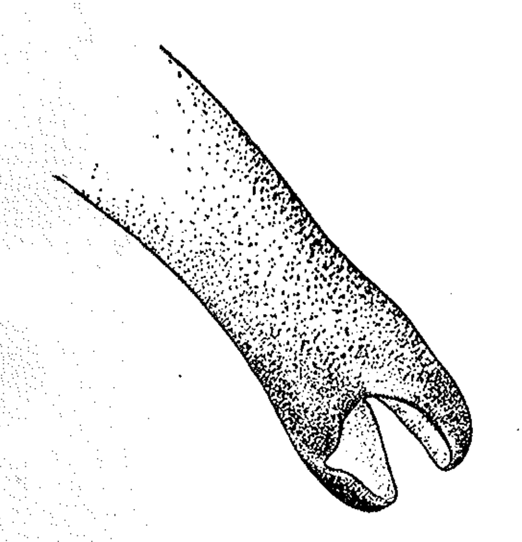


Fig. 2.